

Министерство сельского хозяйства РФ
Департамент научно-технологической политики и образования
ФГОУ ВПО
Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия
Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ:
«ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ»

Методическая разработка

Волгоград
ИПК «Нива»
2010

УДК 519.2(075.3)
ББК 22.17я72
К 67

*Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВГСХА
и учебно-методическим советом факультета электрификации с.х.*

Корниенко, В.С.

К 67 Математическая статистика. Решение задач по теме: «Проверка статистических гипотез». Методическая разработка [Текст]
/В.С. Корниенко; Волгогр. гос. с.-х. акад. Волгоград, 2010. 68 с.

Приведены необходимые теоретические сведения. Решено (в «ручном» режиме и с помощью Mathcad) достаточное число задач на испытание гипотез. Рассмотрены критерии согласия Пирсона и Колмогорова.

Для студентов специальности 110302 - «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства».

УДК 519.2(0.75.3)
ББК 22.17я72

Содержание

1. Теоретические сведения	4
1.1. Предмет математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности	4
1.2. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения	6
1.3. Статистические оценки параметров распределения. Требования к статистическим оценкам	11
1.4. Точечные оценки параметров распределения	12
1.5. Метод максимального правдоподобия	14
1.6. Основные статистические распределения	15
1.7. Понятие статистической гипотезы. Общая постановка задачи проверки статистической гипотезы	16
1.8. Ошибки первого и второго рода. Понятие о статистических критериях	18
1.9. Правосторонняя, левосторонняя и двусторонняя критические области	19
1.10. Гипотезы о значениях числовых характеристик	21
1.10.1. Гипотеза о численной величине среднего значения	21
1.10.2. Гипотеза о числовом значении дисперсии	22
1.10.3. Гипотеза о числовом значении доли признака	22
1.11. Проверка гипотезы о равенстве средних значений	23
1.12. Проверка гипотез о равенстве долей признака	24
1.13. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий	25
1.14. Проверка непараметрических гипотез	26
1.14.1. λ -критерий Колмогорова	27
1.14.2. χ^2 -критерий Пирсона	28
2. Задачи	31

1. Теоретические сведения

1.1. Предмет математической статистики. Генеральная и выборочная совокупность

Роль статистики обусловлена тем, что статистические представления являются важнейшей составляющей интеллектуального багажа современного человека. Они нужны и для повседневной жизни в современном цивилизованном обществе, и для продолжения образования практически во всех сферах человеческой деятельности, например, таких, как социология, экономика, право, медицина, демография.

На современном этапе развития общества, когда в нашу жизнь стремительно вошли референдумы и социологические опросы, кредиты и страховые полисы, разнообразные банковские начисления и т.п., становится очевидной актуальность включения в курс математики материала вероятностно-статистического характера.

Принципиально важным представляется то обстоятельство, что при решении задач математической статистики студентам приходится выполнять довольно много математических расчетов, часто прибегая к подсчетам на калькуляторе или компьютере. Таким образом, изучение этого раздела математики даст серьезный импульс для совершенствования вычислительных умений студентов, развития алгоритмического мышления.

Основная задача математической статистики – это разработка методов получения научно доказанных выводов о массовых явлениях и процессах на основе статистических данных, полученных в результате наблюдений и экспериментов.

Полученные таким образом выводы и заключения представляют собой утверждения об общих вероятностных характеристиках изучаемого процесса или явления, т.е. о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях, дисперсиях и т.д., а не относятся к отдельным испытаниям, из повторения которых складывается данное массовое явление.

В математической статистике рассматриваются две основные категории задач: оценивание и статистическая проверка гипотез.

Первая задача математической статистики подразделяется на точечное оценивание и интервальное оценивание параметров распределения.

Вторая задача математической статистики заключается в том, что делается предположение о законе распределения вероятностей некоторой случайной величины или о параметрах известного распределения вероятностей и осуществляется проверка данного предположения.

При проведении статистического исследования часто задача состоит в изучении группы однородных объектов, явлений или процессов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

При решении данной задачи можно провести сплошное обследование, т.е. обследовать каждый из объектов данной совокупности относительно изучаемого признака. Однако на практике подобное обследование зачастую связано с большими материальными затратами, поэтому в большинстве случаев из всей совокупности объектов отбирается определенное количество объектов, которые подвергаются изучению.

Таким образом, бывают «сплошное исследование» и «выборочное исследование». Обратим внимание на причины, по которым сплошное исследование заменяется выборочным. Во-первых, проведение сплошного исследования часто требует больших организационных усилий и финансовых затрат. Так, перепись населения страны, которая является ярким примером сплошного исследования, связана с подготовкой разнообразной документации, выделением и инструктажем переписчиков, сбором информации, обработкой собранных сведений. Кроме того, в ряде случаев осуществить сплошное исследование просто невозможно, так как это привело бы к порче или уничтожению продукции. Например, при исследовании продолжительности горения партии электроламп, выпущенных заводом, невозможно проверить всю партию, поскольку это просто привело бы к ее уничтожению.

Генеральная совокупность – это совокупность объектов, явлений или процессов, из которых производится выборка.

Выборочная совокупность [*n*-выборка] – это совокупность *n* случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Объем совокупности – это число объектов генеральной совокупности.

Повторная выборка – это выборка, при которой отобранным случайным образом объект обязательно возвращается в генеральную совокупность перед отбором следующего объекта.

Бесповторная выборка – это выборка, при которой отобранный случайным образом объект больше в генеральную совокупность не возвращается.

Одним из основных требований к формированию выборочных совокупностей является требование **репрезентативности** [представительности] выборки, т.е. для характеристики по данным выборочной совокупности интересующего исследователей признака генеральной совокупности необходимо, чтобы единицы выборки в достаточной степени обладали этим признаком.

Пример. Определить, является ли репрезентативной выборка:

- 1) число автомобильных аварий в июне, если необходимо составить статистический отчет по авариям в городе за год;
- 2) городские жители при подсчете числа автомобилей на душу населения в стране;
- 3) люди в возрасте от 40 до 50 лет при выяснении рейтинга молодежной телепрограммы.

Р е ш е н и е. 1) Выборка не является репрезентативной. Летом нет снега и наледи на дорогах, а это одна из основных причин аварий.

2) Выборка не является репрезентативной. Понятно, что в городе машин намного больше, чем в сельских районах. Это необходимо учитывать.

3) Выборка не является репрезентативной. Люди в возрасте от 40 до 50 лет едва ли проявят интерес к программе, ориентированной на молодежную аудиторию. При использовании такой выборки рейтинг может сильно упасть, но это не отразит реального положения вещей.

Для формирования выборочной совокупности применяются различные способы отбора.

Статистические данные должны быть представлены так, чтобы ими можно было пользоваться.

1.2. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

Пусть дана некоторая генеральная совокупность. Из данной генеральной совокупности извлечена выборка, причем в ходе отбора значение x_1 наблюдалось m_1 раз, x_2 - m_2 раз, x_k - m_k раз.

$$\sum_{i=1}^k m_i = n,$$

где n – объем выборки.

Наблюдаемые значения x_i , которые были получены в результате отбора, называются **вариантами**. Число m_i показывает, сколько раз данное значение x_i встречалось в ходе отбора, и называется **частотой варианты** x_i . Если записать последовательность вариантов в возрастающем или убывающем порядке и соответствующие им частоты, то получится таблица, называемая **дискретным вариационным рядом**:

Значения	x_1	x_2	...	x_k
Частоты	m_1	m_2	...	m_k

Отношение частоты m_i к объему выборки n называется **относительной частотой**:

$$\frac{m_i}{n} = w_i.$$

Статистическое распределение выборки – это последовательность вариантов и соответствующих им частот или относительных частот, т.е. дискретный вариационный ряд как раз и характеризует статистическое распределение выборки.

Если промежуток между наименьшим и наибольшим значениями признака в выборке разбить на несколько интервалов одинаковой длины и каждому интервалу поставить в соответствие число выборочных значений признака, попавших в этот интервал, то получим **интервальный вариационный ряд**.

ционный ряд. Статистическое распределение выборки может быть также задано интервальным вариационным рядом.

Предположим, что статистическое распределение частот количественного признака X известно заранее. Введем следующие обозначения:

m_x - число наблюдений, при которых наблюдается значение признака, меньшее x ;

n – объем выборки.

Относительная частота появления события $X < x$ равна $\frac{m_x}{n}$. В том случае, если значение признака x будет изменяться, то будет изменяться и относительная частота, следовательно, относительную частоту $\frac{m_x}{n}$ можно рассматривать как функцию от x . Данная функция называется эмпирической, потому что была получена эмпирическим путем (в результате исследований).

Эмпирическая функция распределения [функция распределения выборки] – это функция $F_n(x)$, которая для каждого значения x определяет относительную частоту события $X < x$:

$$F_n(x) = \frac{m_x}{n}.$$

Следовательно, для того чтобы найти $F_n(x_5)$, необходимо число вариантов, меньших x_5 , разделить на объем выборки n :

$$F_n(x_5) = \frac{m_{x_5}}{n}.$$

Интегральная функция $F(x)$ распределения генеральной совокупности называется **теоретической функцией распределения** (в отличие от эмпирической функции распределения выборочной совокупности).

Они отличаются тем, что теоретическая функция $F(x)$ характеризует вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F_n(x)$ характеризует относительную частоту события $X < x$.

В то же время $F_n(x)$ обладает всеми свойствами функции $F(x)$.

Если n -выборка случайной величины X задана в виде интервального вариационного ряда,

Интервалы	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	...	$[a_k, a_{k+1})$
Частоты	m_1	m_2	...	m_k

где $\sum_{i=1}^k m_i = n$, то в этом случае эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ определяется только на концах интервала. В этом случае ее можно изобра-

зять ломаной, проходящей через точки $(a_i; F_n(a_i))$, $i = \overline{1, k}$. При этом $F_n(a_1) = 0$, $F_n(a_{k+1}) = 1$.

Пример 1. Пусть выборка случайной величины X задана дискретным вариационным рядом (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
m_i	1	3	5	8	12	9	5	2

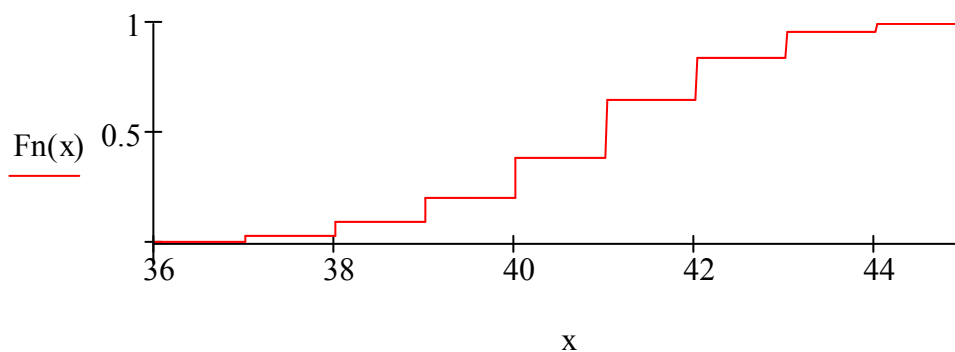
По данным этой табл. найдем накопленные частоты и накопленные относительные частоты (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44	45
m_{x_i}	0	1	4	9	17	29	38	43	45
w_{x_i}	0	0,022	0,089	0,2	0,378	0,644	0,844	0,956	1

Определим эмпирическую функцию $F_n(x)$ и построим ее график.

$$F_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 37 \\ 0.022 & \text{if } 37 < x \leq 38 \\ 0.089 & \text{if } 38 < x \leq 39 \\ 0.2 & \text{if } 39 < x \leq 40 \\ 0.378 & \text{if } 40 < x \leq 41 \\ 0.644 & \text{if } 41 < x \leq 42 \\ 0.844 & \text{if } 42 < x \leq 43 \\ 0.956 & \text{if } 43 < x \leq 44 \\ 1 & \text{if } x > 44 \end{cases}$$



Приведем другое решение этого примера в Mathcad.

ORIGIN := 1

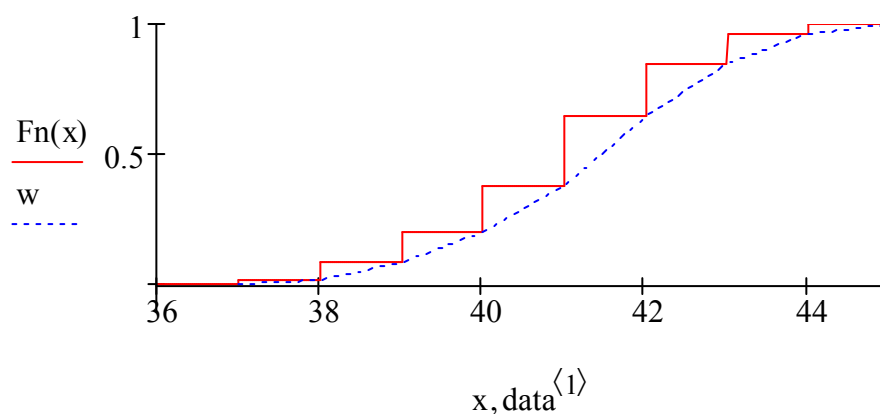
$$\text{data} := \begin{pmatrix} 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 1 & 3 & 5 & 8 & 12 & 9 & 5 & 2 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{data} &:= \text{data}^T \\ n &:= \sum \text{data}^{\langle 2 \rangle} - 45 \end{aligned}$$

$$k := \text{rows}(\text{data}) \quad m := \text{data}^{\langle 2 \rangle} \quad mx_1 := 0$$

$$s := 2..k \quad mx_s := \sum_{i=1}^{s-1} m_{i,1} \quad w := \frac{mx}{n}$$

$$mx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 17 \\ 29 \\ 38 \\ 43 \\ 45 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.022 \\ 0.089 \\ 0.2 \\ 0.378 \\ 0.644 \\ 0.844 \\ 0.956 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Fn(x) := \begin{cases} w_{1,1} & \text{if } x \leq 37 \\ w_{2,1} & \text{if } 37 < x \leq 38 \\ w_{3,1} & \text{if } 38 < x \leq 39 \\ w_{4,1} & \text{if } 39 < x \leq 40 \\ w_{5,1} & \text{if } 40 < x \leq 41 \\ w_{6,1} & \text{if } 41 < x \leq 42 \\ w_{7,1} & \text{if } 42 < x \leq 43 \\ w_{8,1} & \text{if } 43 < x \leq 44 \\ w_{9,1} & \text{if } x > 44 \end{cases}$$



Важно! Пунктирная кривая называется **кумулятивной кривой** [кумулятой].

Пример 2. Пусть выборка случайной величины X задана интервальным вариационным рядом (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

x_i	$[-1,75; -1,25)$	$[-1,25; -0,75)$	$[-0,75; -0,25)$	$[-0,25; 0,25)$
m_i	5	8	9	12
x_i	$[0,25; 0,75)$	$[0,75; 1,25)$	$[1,25; 1,75)$	
m_i	9	3	4	

Для построения эмпирической функции распределения $F_n(x)$ вычислим накопленные частоты w_{a_i} (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

a_i	-1,75	-1,25	-0,75	-0,25	0,25	0,75	1,25	1,75
w_{a_i}	0	0,1	0,26	0,44	0,68	0,86	0,92	1

Воспользовавшись Mathcad, определим эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ и построим ее график.

ORIGIN := 1

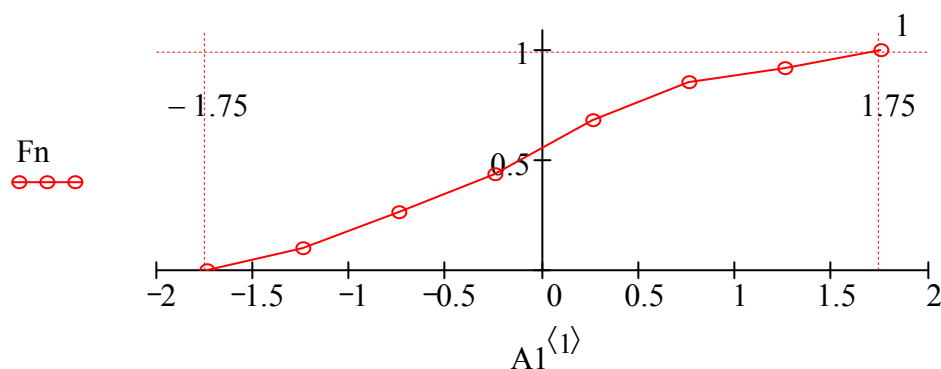
$$A1 := \begin{pmatrix} -1,75 & -1,25 & 5 \\ -1,25 & -0,75 & 8 \\ -0,75 & -0,25 & 9 \\ -0,25 & 0,25 & 12 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 & 9 \\ 0,75 & 1,25 & 3 \\ 1,25 & 1,75 & 4 \end{pmatrix} \quad A := \text{stack}(A1, A2)$$

$$a := (1,75 \quad 1,75 \quad 0)$$

$$A1 := \text{stack}(A, a)$$

$$k := \text{rows}(A1) \quad m := A1^{(3)} \quad n := \sum m$$

$$Fn_1 := 0 \quad s := 2..k \quad Fn_s := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} m_{i,1} \quad Fn = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,26 \\ 0,44 \\ 0,68 \\ 0,86 \\ 0,92 \\ 1 \end{pmatrix}$$



1.3. Статистические оценки параметров распределения. Требования к статистическим оценкам

Большинство практических задач, которые решает статистика, состоит в оценивании некоторого количественного признака генеральной совокупности. Предположим, что исследователю удалось установить, какому именно закону распределения подчиняется изучаемый количественный признак. В этом случае необходимо оценить параметры, которыми определяется предполагаемое распределение. Например, если удалось установить, что количественный признак подчиняется показательному закону распределения вероятностей, тогда необходимо оценить параметр λ , которым определяется данное распределение.

Предположим, что имеются данные выборки, например, значения количественного признака $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученные в результате n наблюдений. Будем рассматривать $x_1, x_2, \dots, x_n$ как независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Статистическая оценка неизвестного параметра теоретического распределения – это функция от наблюдаемых случайных величин.

Таким образом, определить статистическую оценку неизвестного параметра теоретического распределения, значит, определить функцию от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, которая дает приближенное значение оцениваемого параметра.

Для того чтобы статистические оценки $\bar{\theta}_i$ можно было бы принять за оценки параметров θ_i , необходимо и достаточно, чтобы оценки $\bar{\theta}_i$ удовлетворяли трем статистическим свойствам: несмещенности, состоятельности и эффективности.

$\bar{\theta}_i$ называется **несмещенной оценкой** для параметра θ_i , если ее выборочное математическое ожидание равно оцениваемому параметру генеральной совокупности.

$$M(\bar{\theta}_i) = \theta_i; \quad M(\bar{\theta}_i) - \theta_i = \varphi_i,$$

где φ_i – это смещение оценки.

Смещенная оценка – это оценка параметра, чье математическое ожидание не равно оцениваемому параметру, т.е.

$$M(\bar{\theta}_i) \neq \theta_i \quad \text{или} \quad \varphi_i \neq 0.$$

$\bar{\theta}_i$ является **состоятельной оценкой** для параметра θ_i , если она удовлетворяет закону больших чисел. Закон больших чисел гласит о том, что с увеличением выборки значение оценки $\bar{\theta}_i$ стремится к значению параметра θ_i генеральной совокупности:

$$P(|\bar{\theta}_i - \theta_i| < \varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Это же условие можно записать с помощью теоремы **Бернулли**:

$$\bar{\theta}_i \xrightarrow{P} \theta_i \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

т.е. значение оценки $\bar{\theta}_i$ сходится по вероятности к значению параметра θ_i генеральной совокупности при условии, что объем выборки n стремится к бесконечности.

Для определения состоятельности оценки достаточно выполнения двух условий:

1) $\varphi_i = 0$ или $\varphi_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ - смещение оценки равно нулю или стремится к нему при объеме выборки, стремящемся к бесконечности;

2) $D(\bar{\theta}_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ - дисперсия оценки параметра θ_i стремится к нулю при объеме выборки, стремящемся к бесконечности.

$\bar{\theta}_i$ является **эффективной оценкой** для параметра θ_i , если статистическая оценка $\bar{\theta}_i$ имеет наименьшую возможную дисперсию при заданном объеме выборки n .

1.4. Точечные оценки параметров распределения

Рассмотрим повторную выборку $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ значений генеральной совокупности X . Пусть $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$ генеральные средняя и дисперсия совокупности. В качестве оценок для a и σ рассмотрим **выборочную среднюю** [среднюю арифметическую выборки]

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{в Mathcad } \bar{x} = \text{mean}(x)) \quad (1)$$

и **выборочную дисперсию**

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{в Mathcad } S^2 = \text{var}(x)). \quad (2)$$

Доказано, что $\bar{x}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой для a , причем

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (3)$$

Доказано, что $M(S^2) = \frac{n-1}{n} D(X)$, т.е. оценка S^2 является смещенной.

На практике, чтобы избавиться от этого недостатка, для оценки неизвестной дисперсии генеральной совокупности пользуются **исправленной несмещенной оценкой**

$$\overline{S^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{в Mathcad } \overline{S^2} = \text{Var}(x)). \quad (4)$$

Тем не менее, из закона больших чисел следует, что как оценка S^2 , так и $\overline{S^2}$ являются состоятельными оценками для σ^2 .

Для бесповторной выборки оценки (1), (4) так же являются несмещенными и состоятельными, а дисперсия σ_x^2 равна

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N} \right), \quad (5)$$

где N - объем генеральной совокупности. При $N \rightarrow \infty$ бесповторная выборка неотличима от повторной и формула (8) переходит в формулу (6).

Пусть генеральная совокупность содержит M элементов, обладающих некоторым признаком A . Тогда **генеральной долей признака A** называется величина

$$p = \frac{M}{N}. \quad (6)$$

Для доли p несмещенной и состоятельной оценкой будет **выборочная доля**

$$w = \frac{m}{n}, \quad (7)$$

где m – число элементов выборки, обладающих признаком A .

Дисперсия σ_w^2 в случае повторной выборки равна

$$\sigma_w^2 = \frac{pq}{n}, \quad (8)$$

а в случае бесповторной выборки

$$\sigma_w^2 = \frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N} \right), \quad (9)$$

где $q = 1 - p$.

Если n намного меньше N , то повторная выборка практически не отличается от бесповторной и формулы (8) и (12) дают одинаковый результат. Если же $n = N$, то объем выборки равен объему генеральной совокупности и выборочная доля равна генеральной, тогда $\sigma_w^2 = 0$.

Для наглядности и удобства пользования сведем данные о точечных оценках параметров генеральной совокупности в таблицу:

Точечные оценки параметров генеральной совокупности

Параметр	Оценка	Дисперсия для повторной выборки	Дисперсия для бесповторной выборки
a	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N} \right)$
σ^2	$\overline{S^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	-	-
p	$\frac{m}{n}$	$\frac{p(1-p)}{n}$	$\frac{p(1-p)}{n} \left(1 - \frac{n}{N} \right)$

Важно! При больших n ($n > 30$) неизвестные параметры в формулах для дисперсии можно заменить на их выборочные значения без особой потери точности.

1.5. Метод максимального правдоподобия

Рассмотрим один из методов получения точечных оценок параметров генеральной совокупности. Этот метод основан на понятии функции правдоподобия.

Для непрерывной случайной величины *функцией правдоподобия* называется плотность вероятности совместного появления результатов выборки $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta). \quad (1)$$

Для дискретной случайной величины в этой формуле $P(x_i, \theta)$ означает вероятность появления значений x_i . В качестве оценки неизвестного параметра θ принимается такое значение $\bar{\theta}_n$, которое максимизирует функцию L .

Функция L является *мерой правдоподобия* полученных наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому естественно выбирать оценку $\bar{\theta}_n$ так, чтобы имеющиеся наблюдения были наиболее правдоподобны.

Необходимым условием максимума функции L по θ является равенство

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (2)$$

Так как максимумы функций L и $\ln(L)$ достигаются в одной и той же точке, то часто вместо уравнения (2) рассматривают уравнение

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0. \quad (3)$$

Если оцениваемых параметров $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^k$ несколько, т.е.

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta^1, \dots, \theta^k),$$

то для определения их оценок $\bar{\theta}_n^1, \dots, \bar{\theta}_n^k$ решают систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^i} = 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (4)$$

Пример 1. Найдем оценку для вероятности P наступления события A по данному числу m появления этого события в n испытаниях.

В этом случае функция правдоподобия L равна

$$L = C_n^m P^m (1 - P)^{n-m}.$$

Тогда

$$\ln(L) = \ln(C_n^m) + m \ln(P) + (n - m) \ln(1 - P).$$

Уравнение для определения оценки:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial P} = 0 \Rightarrow \frac{m}{P} - \frac{n - m}{1 - P} = 0 \Rightarrow P = \frac{m}{n} = w.$$

Значит, оценкой методом правдоподобия вероятности наступления события будет его относительная частота

$$\bar{P}_n = \frac{m}{n}.$$

Пример 2. Пусть $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ - выборка из нормального распределения $N(a, \sigma)$. Определить параметры a и σ методом наибольшего правдоподобия.

Р е ш е н и е. Составим функцию правдоподобия:

$$L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2\right).$$

Тогда

$$\ln(L) = \frac{-n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Рассмотрим уравнения для определения максимума функции $\ln(L)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0, \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma} &= \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим

$$\sum_{i=1}^n x_i - na = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

Из второго уравнения –

$$\sigma^2 n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S^2.$$

Таким образом,

$$\bar{a} = \bar{x}, \quad \overline{\sigma^2} = S^2.$$

1.6. Основные статистические распределения

Для решения статистических задач используются специальные распределения случайных величин.

Наиболее важным в статистических исследованиях является нормальное распределение. Рассмотрим несколько случайных величин, сконструированных на основе нормального распределения, которые наиболее часто встречаются в математической статистике.

1) Распределение χ_n^2 (хи-квадрат с n степенями свободы).

Если $\xi_i \in N(0,1)$, $i = \overline{1, n}$, - независимые стандартные нормальные случайные величины, то говорят, что случайная величина

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \tag{1}$$

имеет **распределение хи-квадрат с n степенями свободы**.

2) Распределение Стьюдента t_n .

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые стандартные нормальные случайные величины. Тогда случайная величина

$$t_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2}} \quad (2)$$

имеет **распределение Стьюдента с n степенями свободы**.

3) Распределение Фишера.

Пусть

$$\xi_i \in N(0,1), \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j \in N(0,1), \quad j = \overline{1, n},$$

независимые случайные величины. Тогда случайная величина

$$F_{m,n} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \eta_j^2} \quad (3)$$

распределена по закону Фишера со степенями свободы m, n .

Распределения случайных величин χ_n^2 , t_n , $F_{m,n}$ имеются в Mathcad.

1.7. Понятие статистической гипотезы. Общая постановка задачи проверки статистической гипотезы

Второй важнейшей задачей математической статистики после статистического оценивания параметров распределения является статистическая проверка гипотез.

Методы математической статистики позволяют проверить предположения о законе распределения некоторой случайной величины (генеральной совокупности), о значениях параметров этого закона (например, математического ожидания или дисперсии), о наличии корреляционной зависимости между случайными величинами, определенными на множестве объектов одной и той же генеральной совокупности.

Пусть по некоторым данным имеются основания выдвинуть предположения о законе распределения или о параметре закона распределения случайной величины (или генеральной совокупности, на множестве объектов которой определена эта случайная величина). Задача заключается в том, чтобы подтвердить или опровергнуть это предположение, используя выборочные [экспериментальные] данные.

Статистическая гипотеза – это любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о параметрах известных распределений. Гипотезы о значениях параметров распределений или о сравнительной величине параметров двух распределений называются **параметрическими гипотезами**. Гипотезы о виде распределения называются **непараметрическими гипотезами**.

Проверить статистическую гипотезу – значит проверить, согласуются ли выборочные данные с выдвинутой гипотезой.

Примеры статистических гипотез:

1) генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения;

2) математические ожидания двух нормальных совокупностей равны между собой.

Первая гипотеза является непараметрической, а вторая - параметрической.

Вместе с выдвигаемой основной гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. В том случае, если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, противоречащая гипотеза окажется справедливой.

Нулевая [основная или проверяемая] гипотеза – это выдвинутая гипотеза, которая обозначается H_0 .

Конкурирующая [альтернативная] гипотеза – это гипотеза H_1 , которая противоречит нулевой гипотезе.

Пример. Пусть основная гипотеза H_0 состоит в том, что математическое ожидание a равно a_0 . Тогда альтернативная гипотеза H_1 может состоять в предположении, что математическое ожидание a не равно [больше или меньше] значению a_0 :

$$H_0: a = a_0;$$

$$H_1: a \neq a_0,$$

или

$$H_1: a > a_0,$$

или

$$H_1: a < a_0.$$

Простая гипотеза – это гипотеза, которая содержит только одно предположение. Например, если λ – параметр распределения Пуассона, то гипотеза

$$H_0: \lambda = 5$$

является простой. Нулевая гипотеза о том, что математическое ожидание нормального распределения равно 3 (при известной дисперсии)

$$H_0: a = 3$$

также является простой.

Сложная гипотеза – это гипотеза, которая состоит из нескольких простых гипотез. Например, сложная гипотеза

$$H_0: \lambda > 7$$

состоит из множества простых гипотез вида

$$H_1: \lambda = k_1,$$

где k_1 - любое число, большее семи.

1.8. Ошибки первого и второго рода. Понятие о статистических критериях

Проверить статистическую гипотезу – значит проверить, согласуются ли данные, полученные из выборки с этой гипотезой. При этом проверяемая гипотеза может подтвердиться, а может и не подтвердиться. Проверка статистических гипотез сопряжена с возможностью допустить ошибку.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута верная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята ложная гипотеза.

Вероятность совершения ошибки первого рода обозначается α и называется **уровнем значимости**. Уровень значимости α обычно задается близким к нулю (например, 0,05; 0,01; 0,02 и т.д.). Чем меньше уровень значимости α , тем меньше вероятность отвергнуть проверяемую гипотезу H_0 , когда она верна, т.е. совершить ошибку первого рода.

Вероятность не отклонить ложную гипотезу обозначается β .

При проверке нулевой гипотезы могут возникнуть следующие ситуации (табл.):

H_0	верная	ложная
отклоняется	Ошибка первого рода	Решение верное
не отклоняется	Решение верное	Ошибка второго рода

Проверка любой статистической гипотезы осуществляется с помощью статистического критерия.

Статистический критерий – это случайная величина [статистика], которая используется с целью проверки нулевой гипотезы.

В дальнейшем статистический критерий непараметрических гипотез будем обозначать, как правило, буквой ψ .

Статистические критерии носят название соответственно распределению: F -критерий, χ^2 -критерий, t -критерий и т.д.

Наблюдаемое значение статистического критерия – это значение критерия, которое рассчитано по выборке с определенным законом распределения.

Множество всех возможных значений выбранного статистического критерия разделяется на два непересекающихся подмножества. Первое из этих подмножеств включает в себя значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а второе – те значения критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

Критическая область – это множество возможных значений статистического критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Область принятия гипотезы [область допустимых значений] – это множество возможных значений статистического критерия, при которых нулевая гипотеза принимается.

В том случае, если наблюдаемое значение статистического критерия (рассчитанное по выборочной совокупности) принадлежит критической области, нулевую гипотезу отвергают. Если же наблюдаемое значение статистического критерия принадлежит области принятия гипотезы, то нулевая гипотеза принимается.

Критические точки [квантили] - это точки, которые разграничивают критическую область и область принятия гипотезы.

Выделяют одностороннюю и двустороннюю критические области. Дадим определения данных критических областей на примере условного статистического критерия ψ .

Правосторонняя критическая область определяется неравенством $\psi > t_{кр}$, где $t_{кр}$ - это положительное значение статистического критерия, определяемое по таблице распределения данного критерия.

Левосторонняя критическая область определяется неравенством $\psi < t_{кр}$, где $t_{кр}$ - это отрицательное значение статистического критерия, определяемое по таблице распределения данного критерия.

Двусторонняя критическая область определяется неравенствами $\psi < t_{1,кр}$, $\psi > t_{2,кр}$, где $t_{1,кр}$ - отрицательное значение и $t_{2,кр} > t_{1,кр}$.

1.9. Правосторонняя, левосторонняя и двусторонняя критические области. Мощность критерия

Правосторонняя критическая область задается неравенством $\psi > t_{кр}$, где ψ – это наблюдаемое значение статистического критерия, вычисленное по данным выборки. Поэтому для отыскания правосторонней критической области необходимо найти критическую точку $t_{кр}$.

Зададим вероятность совершения ошибки первого рода [уровень значимости α]. Тогда при условии, что нулевая гипотеза является справедливой, вероятность того, что критерий ψ примет значение, большее $t_{кр}$, равна заданному уровню значимости:

$$P(\psi > t_{кр}) = \alpha.$$

Каждому статистическому критерию соответствуют таблицы, по которым и определяют критическую точку, удовлетворяющую заданному уровню значимости.

Левосторонняя критическая область задается неравенством $\psi < t_{кр}$, где ψ – это наблюдаемое значение статистического критерия, вычисленное по данным выборки. Поэтому для отыскания левосторонней критической области необходимо найти критическую точку $t_{кр}$.

Зададим вероятность совершения ошибки первого рода [уровень значимости α]. Тогда при условии, что нулевая гипотеза является справедливой, вероятность того, что критерий ψ примет значение, меньшее $t_{кр}$, равна заданному уровню значимости:

$$P(\psi < t_{кр}) = \alpha.$$

Двусторонняя критическая область задается неравенствами $\psi < t_{1,кр}$ и $\psi > t_{2,кр}$, где $t_{2,кр} > t_{1,кр}$.

Зададим вероятность совершения ошибки первого рода [уровень значимости α]. Тогда при условии, что нулевая гипотеза является справедливой, сумма вероятностей того, что критерий ψ примет значение, меньшее $t_{1,кр}$ или большее $t_{2,кр}$, равна заданному уровню значимости:

$$P(\psi < t_{1,кр}) + P(\psi > t_{2,кр}) = \alpha.$$

Критическая область выбирается в зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 . Если $H_1: >$ - то выбирается правосторонняя критическая область. Если $H_1: <$ - выбирается левосторонняя критическая область. Если $H_1: \neq$ - используется двусторонняя критическая область.

Пусть задан статистический критерий ψ ; W - критическая область (КО), где H_0 отклоняется; $\bar{W}$ - область принятия гипотезы (ОПГ), где H_0 не отклоняется; α - вероятность совершить ошибку первого рода; β - вероятность совершить ошибку второго рода.

Тогда $P(\psi \in W / H)$ - это вероятность того, что критерий ψ попадет в критическую область, если верна гипотеза H .

Таким образом:

для правосторонней гипотезы H_1 $W = (t_{кр}, +\infty)$, $\bar{W} = (-\infty, t_{кр})$;

для левосторонней гипотезы H_1 $W = (-\infty, -t_{кр})$, $\bar{W} = (-t_{кр}, +\infty)$;

для двусторонней гипотезы H_1 $W = (-\infty, -t_{кр}) \cup (t_{кр}, +\infty)$, $\bar{W} = (-t_{кр}, t_{кр})$.

Два требования к критической области:

1) $P(\psi \in W / H_0) = \alpha$ - вероятность того, что критерий ψ попадет в критическую область, если верна H_0 , равна α , т.е. это равенство задает вероятность совершения ошибки первого рода;

2) $P(\psi \in W / H_1) = 1 - \beta \Rightarrow \max$ - вероятность того, что критерий ψ попадет в критическую (область отклонения H_0 в пользу H_1), если верна гипотеза H_1 , это равенство задает вероятность принять правильную гипотезу.

Мощность статистического критерия - это вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза, т.е. $1 - \beta$ - это мощность критерия.

Важно! Если уровень значимости уже выбран, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Выполнение этого требования обеспечивает минимальную ошибку второго рода, состоящую в том, что будет принята неправильная гипотеза.

1.10. Гипотезы о значениях числовых характеристик

Гипотезы о равенстве среднего значения a и дисперсии σ^2 определенным числам a_0 и σ_0^2 являются простыми гипотезами. Они возникают, например, при проверке качества функционирования измерительных устройств. Если a_0 - номинальное значение измеряемого параметра и $a \neq a_0$, то это означает, что прибор дает систематическую ошибку. Точность прибора определяется значением σ_0 и, если $\sigma > \sigma_0$, то это означает, что качество прибора не отвечает стандартным требованиям.

1.10.1. Гипотеза о численной величине среднего значения

Пусть случайная величина $X \in N(a, \sigma)$ и имеется n -выборка ее значений $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$. Рассмотрим гипотезу $H_0: a = a_0$, где a_0 - некоторое число, и ее альтернативу. Проверим гипотезу H_0 на доверительном уровне γ .

1) Дисперсия σ^2 известна.

Так как

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

то случайная величина [статистика]

$$\psi = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \quad (1)$$

будет иметь стандартное нормальное распределение, если H_0 верна (т.е. $a = a_0$). При заданном уровне доверия γ находим такое $t_{кр}$, чтобы

$$P(|\xi_0| < t_{кр}) = \gamma, \quad (2)$$

где $\xi_0 \in N(0,1)$. В Mathcad $t_{кр} = qnorm(1 - \alpha, 0, 1)$.

Будем принимать гипотезу H_0 , если $|\psi| < t_{кр}$. Тогда критическими значениями будут $t_1 = -t_{кр}$, $t_2 = t_{кр}$.

Критической областью будет двусторонняя критическая область

$$T_{кр} = \{t : |t| \geq t_{кр}\},$$

а областью допустимых значений

$$T_0 = \{\psi : |\psi| < t_{кр}\}.$$

2) Дисперсия σ^2 неизвестна.

В этом случае в качестве статистики берут величину

$$\psi = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\bar{S}}, \quad (3)$$

где

$$\overline{S^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \text{Var}(x).$$

Установлено, что статистика ψ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Для заданного уровня доверия γ определяется критическое значение из условия

$$P(|t_{n-1}| < t_{\text{кр}}) = \gamma, \quad (4)$$

и гипотеза H_0 принимается, если

$$|\psi| < t_{n-1, \text{кр}}.$$

В Mathcad $t_{n-1, \text{кр}} = qt(1 - \alpha, n - 1)$.

1.10.2. Гипотеза о числовом значении дисперсии

Пусть случайная величина $X \in N(a, \sigma)$ и имеется n -выборка ее значений. Рассмотрим гипотезу $H_0: \sigma = \sigma_0$ против конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma \neq \sigma_0$, при этом a может быть произвольным. В этом случае в качестве статистики выбираем величину

$$\psi = \frac{(n-1)\overline{S^2}}{\sigma_0^2}. \quad (5)$$

Известно, что статистика ψ имеет хи-квадрат распределение с $n-1$ степенями свободы. Для заданного уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$ выбираем такие U и V , чтобы

$$P(\chi_{n-1}^2 \leq U) = P(\chi_{n-1}^2 \geq V) = \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

и гипотезу H_0 принимаем, если

$$U < \psi < V. \quad (7)$$

В Mathcad $U = qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$, $V = qchisq\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)$.

1.10.3. Гипотеза о числовом значении доли признака

Иногда возникает необходимость сравнения числового значения доли p_A признака A в некоторой генеральной совокупности X с заданным числом p_0 .

Само число p_0 определяется на основе дополнительной информации, полученной в предыдущих исследованиях.

Для решения этой задачи составляется статистика

$$\psi = \frac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}, \quad (8)$$

которая при больших n ($n > 30$) распределена по стандартному нормальному закону $N(0,1)$. Гипотеза $H_0: p_A = p_0$ принимается на уровне доверия γ , если $|\psi| < t_{кр}$, где $t_{кр} = qnorm(1-\alpha, 0, 1)$.

Схемы проверки гипотез о числовых значениях характеристик сведены в таблицу:

Проверка гипотез о числовых характеристиках					
№	Гипотеза H_0	Предположение	Статистика ψ	Критическое значение $t_{кр}$	Критерий принятия H_0
1	$a = a_0$	σ^2 известна	$\psi = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$	$t_{кр} = qnorm(1-\alpha, 0, 1)$	$ \psi < t_{кр}$
2	$a = a_0$	σ^2 неизвестна	$\psi = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\bar{S}}$	$t_{кр} = qt(1-\alpha, n-1)$	$ \psi < t_{кр}$
3	$\sigma = \sigma_0$	-	$\psi = \frac{(n-1)\bar{S}^2}{\sigma_0^2}$	$U = qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$ $V = qchisq\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$	$U < \psi < V$
4	$p_A = p_0$	$n > 30$	$\psi = \frac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$t_{кр} = qnorm(1-\alpha, 0, 1)$	$ \psi < t_{кр}$

1.11. Проверка гипотезы о равенстве средних значений

На практике часто встречаются ситуации, когда среднее значение данных одного эксперимента отличается от среднего значения данных другого, хотя условия эксперимента являются схожими. Тогда возникает вопрос, можно ли считать это расхождение незначимым, т.е. чисто случайным, или оно вызвано существенным различием двух генеральных совокупностей. Например, такие вопросы возникают при исследовании надежности технических систем, где результаты сравниваются с предыдущими измерениями; при контроле качества изделий, изготовленных на разных предприятиях; в финансах – при сравнении уровня доходности различных активов.

Пусть $X_1 \in N(a_1, \sigma_1)$, $X_2 \in N(a_2, \sigma_2)$ и дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 известны. Имеются выборки $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n_1})$ и $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n_2})$ из генеральных совокупностей X_1 и X_2 .

Гипотеза H_0 состоит в том, что средние распределений равны, т.е. $H_0: a_1 = a_2$, при этом $H_1: a_1 \neq a_2$.

Если выполняется гипотеза H_0 , то статистика

$$\psi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (1)$$

будет иметь стандартное нормальное распределение $N(0,1)$ и при данной доверительной вероятности γ $t_{kp} = qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$. Гипотеза H_0 принимается, если $|\psi| < t_{kp}$.

Если же дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но равны, то доказано, что в случае справедливости гипотезы H_0 статистика

$$\psi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (2)$$

имеет распределение Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. Здесь S_1^2 и S_2^2 «неисправленные» выборочные дисперсии, т.е.

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2.$$

По заданной доверительной вероятности γ находим

$$t_{1,kp} = qt\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2\right), \quad t_{2,kp} = qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2\right).$$

Гипотеза H_0 принимается, если $t_{1,kp} < \psi < t_{2,kp}$.

Если $n > 30$, то распределение средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$ можно считать приближенно нормальными, тогда схема проверки гипотез для средних, изложенная выше, подходит для выборок из любой генеральной совокупности.

1.12. Проверка гипотез о равенстве долей признака

Сравнение долей признака в двух совокупностях является важной для практики задачей, так как значимое расхождение между долями признаков характеризует различие между генеральными совокупностями.

Пусть имеются две выборки объемами n_1 и n_2 из двух совокупностей с генеральными долями признака p_1 и p_2 . Выборочные доли признака равны

$$w_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad w_2 = \frac{m_2}{n_2},$$

где m_1 и m_2 - соответственно число элементов первой и второй выборок, обладающих данным признаком. Будем считать n_1 и n_2 достаточно большими ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$), тогда w_1 и w_2 имеют приближенно нормальный закон распределения с математическими ожиданиями p_1 и p_2 и дисперсиями $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}$ и $\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$ соответственно.

Если гипотеза $H_0: p_1 = p_2$ верна, то разность $w_1 - w_2$ имеет нормальный закон распределения с параметрами

$$M(w_1 - w_2) = 0, \quad D(w_1 - w_2) = \sigma_{w_1}^2 + \sigma_{w_2}^2 = p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Поэтому статистика

$$\psi = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (1)$$

имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Важно! Вместо неизвестного значения p , входящего в формулу (1), рекомендуется выбирать общую выборочную долю признака

$$\bar{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}. \quad (2)$$

Далее проверка гипотезы H_0 происходит по схеме, описанной в предыдущих пунктах. Именно $t_{кр} = qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$; гипотеза H_0 принимается, если $|\psi| < t_{кр}$.

1.13. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий

Гипотезы о дисперсиях возникают довольно часто, поскольку дисперсия характеризует такие важные показатели, как точность приборов, технологических процессов, риск, связанный с отклонением доходности от заданного уровня, и т.д.

Пусть имеются выборки $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ и $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ из двух генеральных совокупностей $N(a_1, \sigma_1)$ и $N(a_2, \sigma_2)$. Рассмотрим гипотезу $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против конкурирующей гипотезы $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

В математической статистике доказывается, что статистика

$$\psi = \frac{\overline{S_1^2}}{S_2^2} \quad (1)$$

имеет распределение Фишера со степенями свободы $(n_1 - 1)$ и $(n_2 - 1)$. **Важно!** Здесь числитель больше знаменателя. С помощью Mathcad находим такие U и V , чтобы при заданной доверительной вероятности γ

$$P(F_{n_1-1, n_2-1} \leq U) = P(F_{n_1-1, n_2-1} \geq V) = \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

где F_{n_1-1, n_2-1} - случайная величина, распределенная по закону Фишера с $(n_1 - 1)$ и $(n_2 - 1)$ степенями свободы. Гипотеза H_0 принимается, если $U < \psi < V$. В Mathcad $U = qF\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$, $V = qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$.

Схемы проверки гипотез о равенстве числовых характеристик сведены в таблицу, в которой альтернативная гипотеза H_1 выбирается двусторонней:

Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик

Гипотеза H_0	Предположе- ние	Статистика ψ	Критическое значение $t_{кр}$	Кри- терий приня- тия H_0
$a_1 = a_2$	Дисперсии σ_1^2, σ_2^2 известны	$\psi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$t_{кр} =$ $= qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$	$ \psi < t_{кр}$
$a_1 = a_2$	Дисперсии неизвестны, но равны: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\psi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \times$ $\times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$k = n_1 + n_2 - 2$ $t_{1,кр} = qt\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$ $t_{2,кр} = qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right)$	$t_{1,кр} <$ $< \psi <$ $< t_{2,кр}$
$p_1 = p_2$	$n_1 > 30,$ $n_2 > 30$	$\psi = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{p(1-p)}} \times$ $\times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$t_{кр} =$ $= qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$	$ \psi < t_{кр}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$X_1 \in N(a_1, \sigma_1)$ $X_2 \in N(a_2, \sigma_2)$	$\psi = \frac{\overline{S_1^2}}{\overline{S_2^2}}$ В числителе должно быть боль- шее значение	$U =$ $= qF\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ $V =$ $= qF\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$	$U <$ $< \psi <$ $< V$

В этой таблице S_1^2 и S_2^2 - «неисправленные» выборочные дисперсии;
 $\bar{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$ - общая выборочная доля признака; $\overline{S_1^2}$ и $\overline{S_2^2}$ - несмещенные
 дисперсии.

1.14. Проверка непараметрических статистических гипотез

При проверке гипотезы о предполагаемом законе неизвестного рас-
 пределения используется специальная случайная величина – критерий со-
 гласия.

Критерий согласия – это статистический критерий проверки о
 предполагаемом законе неизвестного распределения.

При проверке непараметрических гипотез используется несколько
 критериев согласия: χ^2 -критерий Пирсона, λ -критерий Колмогорова, Смир-
 нова и др.

1.14.1. λ -критерий Колмогорова

Этот критерий связан с расчетом эмпирических функций распределения (см. п. 1.2).

λ -критерий Колмогорова применяется для проверки гипотезы о распределении *непрерывной* случайной величины. При его использовании сравниваются эмпирическая $F_n(x)$ и предполагаемая $F(x)$ функция распределения.

Алгоритм проведения проверки:

1. Производится выборка объемом $n \geq 50$.
2. Находим эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$.
3. По данным выборки x_i для предполагаемой функции распределения $F(x)$ определим $F(x_i)$.
4. Вычислим значение статистики: $\lambda = \sqrt{n} \cdot \max_{x_i} |F(x_i) - F_n(x_i)|$.
5. По уровню значимости α из специальной таблицы находим критическую точку $\lambda_{кр}$.
6. Если $\lambda < \lambda_{кр}$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несущественны. Если $\lambda > \lambda_{кр}$, то различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны.

Если по выборке объема n получен дискретный вариационный ряд,

Значения	x_1	x_2	...	x_k
Частоты	m_1	m_2	...	m_k

то для λ -критерия Колмогорова с известной теоретической функцией распределения $F(x)$ расчетная таблица имеет вид

i	x_i	m_i	$w_i = \frac{m_i}{n}$	$F_n(x_i)$	$F(x_i)$	$ F(x_i) - F_n(x_i) $
-----	-------	-------	-----------------------	------------	----------	-----------------------

Если по выборке объема n получен интервальный вариационный ряд,

Интервалы	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	...	$[a_k, a_{k+1})$
Частоты	m_1	m_2	...	m_k

то расчетная таблица имеет вид

i	a_i	m_i	$w_i = \frac{m_i}{n}$	$F_n(a_i)$	$F(a_i)$	$ F(a_i) - F_n(a_i) $
-----	-------	-------	-----------------------	------------	----------	-----------------------

Важно! В критерии Колмогорова параметры закона распределения $F(x)$ считаются известными заранее, так что, заменяя их выборочными значениями, мы всегда привносим некоторую ошибку.

1.14.2. χ^2 -критерий Пирсона

Этот критерий связан с расчетом теоретических частот.

Эмпирические и теоретические частоты

Пусть X - это дискретная случайная величина с неизвестным законом распределения вероятностей. В ходе n испытаний значение x_1 наблюдалось m_1 раз, x_2 - m_2 раз, x_k - m_k раз. $\sum_{i=1}^k m_i = n$, где n - объем выборки.

Эмпирические частоты - это фактические наблюдаемые частоты m_i .

Предположим, что изучаемая случайная величина X подчиняется некоторому определенному закону распределения. Ставится задача проверки, согласуется ли это предположение с данными, полученными в результате наблюдений. С этой целью рассчитываются теоретические частоты наблюдаемых значений, т.е. находят, сколько раз случайная величина X теоретически должна принять каждое из наблюдаемых значений, если она распределена по предлагаемому закону.

Теоретические [выравнивающие] частоты - это частоты m'_i , которые в отличие от фактически наблюдаемых эмпирических частот найдены с помощью *вычислений*.

Теоретические частоты m'_i рассчитываются по формуле

$$m'_i = n \cdot P_i,$$

где n - объем выборки; P_i - это вероятность появления наблюдаемого значения x_i , рассчитанная при условии, что случайная величина X подчиняется предполагаемому закону распределения вероятностей.

Таким образом, теоретическая частота m'_i наблюдаемого значения x_i дискретной случайной величины X рассчитывается как произведение числа испытаний n на вероятность появления этого наблюдаемого значения P_i .

Пусть теперь X - это непрерывная случайная величина. В этом случае вероятности P_i наступления отдельных возможных значений x_i равны нулю. Для вычисления теоретических частот непрерывного распределения интервал возможных значений случайной величины делят на k непересекающихся интервалов. Далее рассчитывают вероятности P_i попадания величины X в i -й интервал, и умножают число испытаний n на эти вероятности.

Таким образом, теоретические частоты непрерывного распределения вычисляют по формуле

$$m'_i = n \cdot P_i,$$

где n – объем выборки; P_i – вероятность попадания X в i -й интервал, рассчитанная при условии, что непрерывная случайная величина X подчиняется предполагаемому закону распределения.

Например, если предполагается, что непрерывная случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения $N(a, \sigma)$, то теоретические частоты рассчитываются по формуле

$$m'_i = n \cdot P_i,$$

где в Mathcad

$$P_i = \text{pnorm}(a_{i+1}, \bar{x}, \bar{\sigma}) - \text{pnorm}(a_i, \bar{x}, \bar{\sigma}).$$

Здесь $\bar{x}$ – выборочная средняя, $\bar{\sigma}^2$ – выборочная дисперсия.

На практике вычисление статистики χ^2 – трудоемкая задача, поэтому часто применяют другой критерий, называемый χ^2 -критерием. Его можно использовать для любых распределений. Чтобы воспользоваться этим критерием, выборочные данные представляют в виде интервального вариационного ряда.

Интервалы	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	...	$[a_k, a_{k+1})$
Частоты	m_1	m_2	...	m_k

По виду построенной гистограммы распределения делаем вывод о распределении случайной величины X . После этого вычисляем параметры предполагаемого распределения. Пусть эта функция имеет вид $F(x)$.

Для удобства вычислений составим таблицу,

i	a_i	$F(a_i)$	a_{i+1}	$F(a_{i+1})$	$P_i = F(a_{i+1}) - F(a_i)$	m_i	$c_i = \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}$
-----	-------	----------	-----------	--------------	-----------------------------	-------	-------------------------------------

где nP_i – это теоретические частоты.

Вычисляем статистику

$$\chi = \sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}.$$

Критическое значение $\chi_{кр}$ находится по таблице χ^2 -распределения в зависимости от заданного уровня значимости α и числа степеней свободы l : $\chi_{кр}(\alpha, l)$.

Число степеней свободы находят по равенству

$$l = s - r - 1,$$

где s – число интервалов интервального вариационного ряда; r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

Например, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение), и число степеней свободы равно $l = s - 3$.

Если $\chi < \chi_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Если $\chi > \chi_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

С помощью Mathcad можно вычислить:

для нормального распределения

$$P_i = \text{pnorm}(a_{i+1}, a, \sigma) - \text{pnorm}(a_i, a, \sigma);$$

для распределения Пуассона

$$P_i = \text{ppois}(a_{i+1}, \lambda) - \text{ppois}(a_i, \lambda);$$

для показательного распределения

$$P_i = \text{pexp}(a_{i+1}, \lambda) - \text{pexp}(a_i, \lambda);$$

для равномерного распределения в интервале (a, b)

$$P_i = \text{punif}(a_{i+1}, a, b) - \text{punif}(a_i, a, b).$$

В Mathcad: $\chi_{кр} = \text{qchisk}(1-\alpha, m-r-1)$.

Важно! Поскольку статистика χ имеет распределение χ^2 при $n \rightarrow \infty$, то:

1) критерий Пирсона следует применять только при больших n ($n > 30$);

2) необходимо, чтобы в каждом интервале вариационного ряда было достаточное количество наблюдений, по крайней мере, 5 наблюдений. Если в каком-нибудь интервале число наблюдений меньше пяти, имеет смысл объединить соседние интервалы, чтобы в объединенных интервалах было не меньше пяти. Поэтому при вычислении числа степеней свободы в качестве величины m берется соответственно уменьшенное число интервалов.

Замечание. Критерий Колмогорова достаточно часто применяется на практике благодаря своей простоте. Однако в принципе его применение возможно лишь тогда, когда теоретическая функция распределения $F(x)$ задана полностью. Но такой случай на практике встречается весьма редко. Обычно из теоретических соображений известен лишь вид функции распределения, а ее параметры определяются по эмпирическим данным. Поэтому, если при неизвестных значениях параметра применить критерий Колмогорова, взяв за значения параметров их оценки, то получим завышенное значение вероятности $P(\lambda)$, а значит, большее критическое значение $\lambda_{кр} = \lambda_{\alpha}$. В результате есть риск в ряде случаев принять гипотезу о законе распределения случайной величины как правдоподобную, в то же время как на самом деле она противоречит опытным данным. В критерии Пирсона это обстоятельство учитывается.

2. Задачи

Задача 1. По результатам $n = 9$ замеров установлено, что выборочное среднее время (в секундах) изготовления детали $\bar{x} = 48$. Предполагая, что время изготовления – нормально распределенная случайная величина с дисперсией $\sigma^2 = 9$, рассмотреть гипотезу $H_0: a = 49$ против конкурирующей гипотезы $H_1: a \neq 49$. Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение. Здесь рассматривается простая гипотеза $a = 49$ против сложной $a \neq 49$. Тогда $W = (-\infty, -t_{kp}) \cup (t_{kp}, +\infty)$ и $\bar{W} = (-t_{kp}, t_{kp})$. На уровне $\gamma = 0,95$ находим по таблицам нормального распределения $t_{kp} = 1,96$. Согласно таблице подпункта 1.10.3 гипотеза принимается при

$$|\psi| = \left| \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} \right| < t_{kp}.$$

Так как $\psi = \frac{(48 - 49)\sqrt{9}}{3} = -1$ и $\psi \in \bar{W}$, то гипотеза H_0 принимается.

Mathcad-контроль:

$$\begin{aligned} a &:= 49 & \gamma &:= 0.95 & \alpha &:= 1 - \gamma & t &:= \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) & t &= 1.96 \\ xs &:= 48 & n &:= 9 & \sigma^2 &:= 9 & \sigma &:= \sqrt{\sigma^2} \\ \psi &:= \frac{(xs - a) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} & \psi &= -1 & |\psi| &< t &= 1 \end{aligned}$$

Задача 2. По утверждению руководства фирмы, средний размер дебиторского учета равен 187,5 тыс. руб. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что средняя арифметическая выборка равна 175 тыс. руб. при среднем квадратичном отклонении 35 тыс. руб. Может ли оказаться в действительности правильным объявленный размер дебиторского счета? Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение. Здесь $a_0 = 187,5$ тыс. руб., $\bar{x} = 175$ тыс. руб., $n = 10$, $\bar{\sigma} = 35$, $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$. Так как дисперсия неизвестна, то для проверки гипотезы $H_0: \bar{x} = a$ воспользуемся распределением Стьюдента (2-я строка таблицы подпункта 1.10.3). Тогда

$$\psi = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\bar{S}} = \frac{(175 - 187,5)\sqrt{10}}{35} = -1,129.$$

По таблицам распределения Стьюдента при $\gamma = 0,95$ находим $t_{9,kp} = 2,25$. Так как $\psi \in \bar{W} = (-t_{9,kp}, t_{9,kp}) = (-2,25; 2,25)$, то гипотеза H_0 о среднем размере дебиторского счета принимается на уровне доверия $\gamma = 0,95$.

Mathcad-контроль:

$$a0 := 187500 \quad xs := 175000 \quad n := 10 \quad \sigma := 35$$

$$\psi := \frac{(xs - a0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \quad \psi = -1.129 \times 10^3$$

$$\gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1\right) \quad t = 2.262$$

Задача 3. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии σ^2 контролируемого размера изделий, которая не должна превышать 0,15. По данным из 25 отобранных изделий вычислена несмещенная дисперсия $\overline{S^2} = 0,25$. Выяснить, обеспечивает ли станок требуемую точность. Доверительная вероятность $\gamma = 99 \%$.

Р е ш е н и е. Предположим, что размер изделия – нормальная случайная величина. Рассмотрим гипотезу $H_0: \sigma^2 = 0,15$ и альтернативную $H_1: \sigma^2 > 0,15$. В этом случае $W = (t_{kp}, +\infty)$ и $\overline{W} = (-\infty, t_{kp})$. Найдем по таблицам χ^2 число V из условия $P(\chi_{n-1}^2 > V) = 0,1$ при $n = 25$. Получим $V = 15,5$. Считаем $U = 0$, рассматривая правостороннюю критическую область.

Для проверки гипотезы вычислим статистику (см. формулу (5) подпункта 1.10.2)

$$\psi = \frac{(n-1)\overline{S^2}}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 0,25}{0,15} = 40.$$

Так как $\psi \notin \overline{W} = (-\infty, t_{kp}) = (-\infty, V)$, то гипотеза о достижении станком требуемой точности отклоняется.

Mathcad-контроль:

$$S2 := 0.25 \quad n := 25 \quad \sigma02 := 0.15 \quad \psi := \frac{(n-1) \cdot S2}{\sigma02} \quad \psi = 40$$

$$\gamma := 0.90 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad V := qchisq(\alpha, n - 1) \quad V = 15.659$$

$$\psi > V = 1$$

Задача 4. Партия изделий принимается в том случае, если вероятность p_0 того, что изделие окажется соответствующим стандарту, будет не менее 0,95. Среди случайно отобранных 100 изделий оказалось 98 соответствующих стандарту. Можно ли принять партию? Доверительная вероятность $\gamma = 90 \%$.

Р е ш е н и е. В задаче требуется принять гипотезу о том, что неизвестная генеральная доля не менее определенного числа. Пусть $H_0: p > p_0 = 0,95$, $H_1: p \leq 0,95$. Тогда $W = (-\infty, -t_{kp})$ и $\overline{W} = (-t_{kp}, +\infty)$. Найдем t_{kp} из условия

$$P(\psi < t_{kp}) = 0,9 \Rightarrow t_{kp} = 1,282.$$

Вычислим статистику

$$\psi = \frac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} = \frac{(0,98 - 0,95)\sqrt{100}}{\sqrt{0,95 \cdot 0,05}} = 1,3768.$$

Так как $\psi \in \bar{W} = (-1,282, +\infty)$, то на уровне значимости $\alpha = 0,1$ гипотеза о принятии партии изделий принимается.

Mathcad-контроль:

$$\begin{aligned} p_0 &:= 0.95 & w &:= 0.98 & n &:= 100 & \psi &:= \frac{(w - p_0) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)}} \\ \psi &= 1.376 & \gamma &:= 0.9 & \alpha &:= 1 - \gamma & t &:= \text{qnorm}(1 - \alpha, 0, 1) \\ t &= 1.282 & \psi &> t &= 1 \end{aligned}$$

Задача 5. Было произведено $n_1 = 12$ измерений диаметра вала (в мм). При этом оказалось, что среднее $\bar{x}_1 = 10,2$, а стандартное среднее квадратичное отклонение $\sigma_1 = 0,05$. Затем вал поместили в условия с высокой температурой и провели еще $n_2 = 8$ измерений диаметра его оси. Среднее на этот раз оказалось равным $\bar{x}_2 = 10,25$, а стандартное отклонение $\sigma_2 = 0,06$. Можно ли сделать вывод, что диаметр вала существенно увеличивается при увеличении температуры? Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение. Здесь

$$\bar{x}_1 = 10,2; \sigma_1 = 0,05; n_1 = 12; \bar{x}_2 = 10,25; \sigma_2 = 0,06; n_2 = 8.$$

Гипотеза H_0 состоит в том, что $a_1 = a_2$, против конкурирующей $H_1: a_1 \neq a_2$. В этом случае $W = (-\infty, -t_{kp}) \cup (t_{kp}, +\infty)$ и $\bar{W} = (-t_{kp}, t_{kp})$.

Будем считать, что результаты измерений диаметра вала являются нормально распределенными случайными величинами с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 . Для проверки гипотезы H_0 составляем статистику (см. 1-ю строку таблицы п. 1.13)

$$\psi = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{10,2 - 10,25}{\sqrt{\frac{0,05^2}{12} + \frac{0,06^2}{8}}} = -1,9487.$$

Так как при уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$ критическое значение нормального распределения $t_{kp} = 1,96$ и $\psi \in \bar{W} = (-1,96; 1,96)$, то гипотеза H_0 на уровне доверия 0,95 принимается и можно считать, что диаметр вала существенно не увеличивается в условиях повышенной температуры.

Mathcad-контроль:

$$\begin{aligned}
xs1 &:= 10.2 & xs2 &:= 10.25 & \sigma 1 &:= 0.05 & \sigma 2 &:= 0.06 \\
n1 &:= 12 & n2 &:= 8 & \psi &:= \frac{xs1 - xs2}{\sqrt{\frac{\sigma 1^2}{n1} + \frac{\sigma 2^2}{n2}}} & \psi &= -1.949 \\
\gamma &:= 0.95 & \alpha &:= 1 - \gamma & t &:= \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) & t &= 1.96 \\
|\psi| &< t = 1
\end{aligned}$$

Задача 6. Расходы сырья x_i и y_i на единицу продукции по старой и новой технологиям приведены в таблице.

	По старой технологии				По новой технологии				
Расход сырья	x_i	304	307	308	y_j	303	304	306	308
Число изделий	n_i	1	4	4	n_j	2	6	4	1

Предполагается, что генеральные совокупности X и Y имеют нормальные распределения с одинаковыми дисперсиями и средними a_1, a_2 . Требуется проверить гипотезу $H_0: a_1 = a_2$ против $H_1: a_1 \neq a_2$. Доверительная вероятность $\gamma = 90\%$.

Решение. В этом случае $\bar{W} = (-t_{kp}, t_{kp})$. Вычислим

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^3 x_i n_i = 307,11; & \overline{S_x^2} &= \frac{1}{n_x - 1} \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 = 1,1610; \\
\bar{y} &= \frac{1}{n_y} \sum_{j=1}^4 y_j n_j = 304,77; & \overline{S_y^2} &= \frac{1}{n_y - 1} \sum_{j=1}^4 (y_j - \bar{y})^2 = 2,192.
\end{aligned}$$

Тогда статистика (см. 2-ю строку таблицы п. 1.13)

$$\psi = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_x \overline{S_x^2} + n_y \overline{S_y^2}}{n_x + n_y - 2} \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y} \right)}} = \frac{307,11 - 304,77}{\sqrt{\frac{9 \cdot 1,1610 + 13 \cdot 2,192}{9 + 13 - 2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{13} \right)}} = 3,683.$$

Если H_0 верна, то статистика ψ имеет распределение Стьюдента с $n_x + n_y - 2 = 20$ степенями свободы. При $\alpha = 1 - \gamma = 0,1$ находим $t_{20, kp} = 1,725$. Поскольку $\psi \notin \bar{W} = (-1,725; 1,725)$, то гипотезу H_0 отвергаем, т.е. при переходе на новую технологию происходит изменение среднего расхода сырья.

Mathcad-контроль:

ORIGIN := 1

$$xv := \begin{pmatrix} 304 & 307 & 308 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad yv := \begin{pmatrix} 303 & 304 & 306 & 308 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$xv := xv^T \quad yv := yv^T \quad nx := \sum xv^{(2)} \quad ny := \sum yv^{(2)}$$

$$bxv := \frac{xv^{(1)} \cdot xv^{(2)}}{nx} \quad bxv = 307.111$$

$$byv := \frac{yv^{(1)} \cdot yv^{(2)}}{ny} \quad byv = 304.769$$

$$Sx2 := \frac{1}{nx - 1} \cdot xv^{(2)} \cdot (xv^{(1)} - bxv)^2 \quad Sx2 = 1.611$$

$$Sy2 := \frac{1}{ny - 1} \cdot yv^{(2)} \cdot (yv^{(1)} - byv)^2 \quad Sy2 = 2.192$$

$$\psi := \frac{bxv - byv}{\sqrt{\frac{nx \cdot Sx2 + ny \cdot Sy2}{nx + ny - 2} \cdot \left(\frac{1}{nx} + \frac{1}{ny} \right)}} \quad \psi = 3.683$$

$$\gamma := 0.9 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, nx + ny - 2\right) \quad t = 1.725$$

$$|\psi| < t = 0$$

Задача 7. Контрольную работу по высшей математике выполняли студенты двух групп. В первой группе было предложено 100 задач, из которых были правильно решены 58, во второй группе из 120 задач верно решены 65. Проверить гипотезу о том, что материал одинаково усвоен студентами обеих групп. Доверительная вероятность $\gamma = 98\%$.

Р е ш е н и е. Выборочные доли решенных задач равны

$$w_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{58}{100} = 0,58; \quad w_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{65}{120} = 0,542.$$

Имеем гипотезу $H_0: p_1 = p_2$ против $H_1: p_1 \neq p_2$, где p_1 и p_2 истинные доли числа решенных задач студентами обеих групп.

Составим статистику (см. 3-ю строку таблицы п. 1.13)

$$\psi = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Принимая в качестве $\bar{p}$ значение

$$\bar{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{58 + 65}{100 + 120} = 0,559,$$

получим

$$\psi = \frac{0,58 - 0,542}{\sqrt{0,559(1 - 0,559)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{120}\right)}} = 0,565.$$

Для уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0,02$ по таблицам находим $t_{кр} = 2,33$. Так как $\psi \in \bar{W} = (-2,33; 2,33)$, то гипотезу H_0 об одинаковой успеваемости материала принимаем.

Mathcad-контроль:

$$m1 := 58 \quad n1 := 100 \quad m2 := 65 \quad n2 := 120$$

$$w1 := \frac{m1}{n1} \quad w2 := \frac{m2}{n2} \quad p1 := \frac{m1 + m2}{n1 + n2} \quad p1 = 0.559$$

$$\psi := \frac{w1 - w2}{\sqrt{p1 \cdot (1 - p1) \cdot \left(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}\right)}} \quad \psi = 0.57$$

$$\gamma := 0.98 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \quad t = 2.326$$

$$-t < \psi < t = 1$$

Задача 8. Проверить гипотезу H_0 о равенстве дисперсий в задаче 19. Доверительная вероятность $\gamma = 90\%$.

Р е ш е н и е. Используя результаты задачи 6 и последнюю строку таблицы п. 1.13, находим

$$\overline{S_x^2} = 1,1610; \quad \overline{S_y^2} = 2,192; \quad \psi = \frac{\overline{S_y^2}}{\overline{S_x^2}} = 1,888.$$

Из (2) п. 1.13, пользуясь таблицами распределения Фишера, находим U и V

$$P(F_{8,12} < U) = 0,5 \Rightarrow U = 0,305; \quad P(F_{8,12} > V) = 0,05 \Rightarrow V = 2,85.$$

Так как $\psi \in \bar{W} = (U, V)$, то гипотеза H_0 принимается.

Mathcad-контроль:

$$Sy2 > Sx2 = 1 \quad \psi := \frac{Sy2}{Sx2} \quad \psi = 1.361$$

$$\gamma := 0.9 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad U := \text{qF}\left(\frac{\alpha}{2}, ny - 1, nx - 1\right) \quad U = 0.351$$

$$V := \text{qF}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, ny - 1, nx - 1\right) \quad V = 3.284 \quad U < \psi < V = 1$$

Задача 9. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 100$ г. В случайной выборке объема $n = 25$ пачек средний вес $\bar{X} = 101,5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение.

H_0 : для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

H_1 : $a \neq 100$ г.

Проведем двустороннюю проверку.

$$xs := 101.5 \quad \sigma := 1 \quad a := 100 \quad n := 25 \quad \psi := \frac{(xs - a) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\psi = 7.5 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$$

$$t = 1.96 \quad -t < \psi < t = 0$$

Отклоняем гипотезу H_0 ($\psi \notin \bar{W} = (-t, t)$) и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5 %. Автомат нужно отрегулировать.

Задача 10. (Решить самостоятельно). Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 1,5$ г, фасует чай в пачки со средним весом $a = 80$ г. В случайной выборке объема $n = 16$ пачек средний вес $\bar{X} = 78,5$ г. Надо ли отрегулировать автомат? Доверительная вероятность $\gamma = 99\%$.

Ответ: автомат нужно отрегулировать.

Задача 11. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0,5$ мм, производит детали средней длины $a = 20$ мм. В случайной выборке объема $n = 16$ деталей средняя длина $\bar{X} = 19,8$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $\gamma = 99\%$.

Решение.

H_0 : для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 20$ мм.

H_1 : $a < 20$ мм.

Проведем левостороннюю проверку (см. 1-ю строку таблицы подпункта 1.10.3).

$$xs := 19.8 \quad \sigma := 0.5 \quad a := 20 \quad n := 16 \quad \psi := \frac{(xs - a) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\psi = -1.6 \quad \gamma := 0.99 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := \text{qnorm}(1 - \alpha, 0, 1)$$

$$t = 2.326 \quad \psi > -t = 1$$

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1 % ($\psi \in \bar{W} = (-t, +\infty)$).

Задача 12. (Решить самостоятельно). Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0,4$ мм, производит детали средней длины $a = 30$ мм. В случайной выборке объема $n = 25$ деталей средняя длина $\bar{X} = 30,1$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность $\gamma = 95$ %.

Ответ: станок настроен правильно.

Задача 13. Производитель утверждает, что средний вес пачки чая не меньше $a = 100$ г. Инспектор отобрал 10 пачек чая и взвесил. Их вес оказался 97, 102, 103, 98, 96, 105, 98, 100, 101, 99 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес пачек чая распределен нормально. Доверительная вероятность $\gamma = 99$ %.

Решение.

H_0 : для нормальной совокупности генеральная средняя $a = 100$ г.

H_1 : $a < 100$ г.

Проведем левостороннюю проверку с помощью Mathcad (см. 2-ю строку таблицы подпункта 1.10.3).

$x := (97 \ 102 \ 103 \ 98 \ 96 \ 105 \ 98 \ 100 \ 101 \ 99)$ $n := \text{cols}(x)$

$xs := \text{mean}(x)$ $S := \sqrt{\text{var}(x)}$ $a := 100$ $\psi := \frac{(xs - a) \cdot \sqrt{n}}{S}$

$\psi = -0.117$ $\gamma := 0.99$ $\alpha := 1 - \gamma$ $t := \text{qt}(1 - \alpha, n - 1)$

$t = 2.821$ $\psi > -t = 1$

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1 %. Выборка инспектора не противоречит утверждению производителя.

Задача 14. (Решить самостоятельно). Производитель утверждает, что средний вес плитки шоколада не меньше $a = 50$ г. Инспектор отобрал 10 плиток шоколада и взвесил. Их вес оказался 49, 50, 51, 52, 48, 47, 49, 52, 48, 51 г соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес плитки шоколада распределен нормально. Доверительная вероятность $\gamma = 95$ %.

Ответ: выборка не противоречит утверждению производителя.

Задача 15. Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 3 %. В случайной выборке объема $n = 100$ изделий оказалось 5 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $\gamma = 95$ %.

Решение.

H_0 : доля бракованных изделий равна 3 %, т.е. $\bar{p} = 0,03$.

H_1 : $\bar{p} > 0,03$.

Проведем правостороннюю проверку с помощью Mathcad (см. последнюю строку таблицы подпункта 1.10.3).

$$n := 100 \quad m := 5 \quad w := \frac{m}{n} \quad p0 := 0.03 \quad \psi := \frac{(w - p0) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p0 \cdot (1 - p0)}}$$

$$\psi = 1.172 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := \text{qnorm}(1 - \alpha, 0, 1)$$

$$t = 1.645 \quad \psi < t = 1$$

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5 %. Выборка не противоречит утверждению производителя.

Задача 16. (Решить самостоятельно). Производитель утверждает, что доля бракованных изделий не превосходит 7 %. В случайной выборке объема $n = 150$ изделий оказалось 16 бракованных изделий. Не противоречит ли это утверждению производителя? Доверительная вероятность $\gamma = 99$ %.

Ответ: выборка не противоречит утверждению производителя.

Задача 17. Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $\text{var1} = 20$ %. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 10$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $\text{var2} = 30$ %. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски 1 и 2? Доверительная вероятность $\gamma = 95$ %.

Решение.

$$H_0: \text{Var1} = \text{Var2}.$$

$$H_1: \text{Var1} \neq \text{Var2}.$$

$$\text{var1} := 20 \quad \text{var2} := 30 \quad n1 := 12 \quad n2 := 10$$

$$\text{Var1} := \frac{n1}{n1 - 1} \cdot \text{var1} \quad \text{Var2} := \frac{n2}{n2 - 1} \cdot \text{var2}$$

$$\text{Var1} = 21.818 \quad \text{Var2} = 33.333 \quad \text{Var2} > \text{Var1} = 1$$

$$\psi := \frac{\text{Var2}}{\text{Var1}} \quad \psi = 1.528 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma$$

$$t := \text{qF}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n2 - 1, n1 - 1\right) \quad t = 3.588 \quad -t < \psi < t = 1$$

Принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 5 %. Риски инвестиций равны.

Задача 18. (Решить самостоятельно). Инвестиция 1 рассчитана на $n_1 = 14$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $\text{var1} = 15$ %. Инвестиция 2 рассчитана на $n_2 = 12$ лет, дисперсия ежегодных прибылей $\text{var2} = 20$ %. Предполагается, что распределение ежегодных прибылей на инвестиции подчиняется нормальному закону распределения. Равны ли риски 1 и 2? Доверительная вероятность $\gamma = 99$ %.

Ответ: риски инвестиций равны.

Задача 19. На двух токарных станках обрабатываются втулки. Отобраны две пробы: из втулок, сделанных на первом станке, $n_1 = 15$ шт., на втором станке - $n_2 = 18$ шт. По данным этих выборок рассчитаны выборочные смещенные дисперсии $S_1^2 = \text{var1} = 8,5$ (для первого станка) и $S_2^2 = \text{var2} = 6,3$ (для второго станка). Полагая, что размеры втулок подчиняются нормальному закону распределения, выяснить, можно ли считать, что станки обладают различной точностью. Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение. Имеем нулевую гипотезу $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, т.е. дисперсии размера втулок, обрабатываемых на каждом станке, равны. Возьмем в качестве альтернативной гипотезу $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (дисперсия больше для первого станка). Будем иметь правостороннюю критическую область. Находим в Mathcad (см. последнюю строку таблицы п. 1.13).

$$\text{var1} := 8.5 \quad \text{var2} := 6.3 \quad n1 := 15 \quad n2 := 18$$

$$\text{Var1} := \frac{n1}{n1 - 1} \cdot \text{var1} \quad \text{Var2} := \frac{n2}{n2 - 1} \cdot \text{var2}$$

$$\text{Var1} = 9.107 \quad \text{Var2} = 6.671 \quad \text{Var1} > \text{Var2} = 1$$

$$\psi := \frac{\text{Var1}}{\text{Var2}} \quad \psi = 1.365 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma$$

$$t := \text{qF}(1 - \alpha, n1, n2) \quad t = 2.269 \quad -t < \psi < t = 1$$

Гипотеза H_0 не отвергается на уровне значимости 5 %, т.е. имеющиеся данные не позволяют считать, что станки обладают различной точностью.

Теперь в качестве альтернативной гипотезы возьмем $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. В этом случае критическая область будет двусторонней. Находим

$$t := \text{qF}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n1, n2\right) \quad t = 2.667 \quad -t < \psi < t = 1$$

Гипотеза H_0 принимается на уровне значимости 5 %.

Замечание. Если в задаче не даны дисперсии var1 и var2 , но даны $n1$ -выборка $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n1})$ и $n2$ -выборка $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n2})$, то

$$\text{Var1} := \text{Var}(x), \quad \text{Var2} := \text{Var}(y).$$

Задача 20. Автомат 1 и автомат 2 фасуют чай в пакеты. Стандартные отклонения $\sigma_1 = 1$ г и $\sigma_2 = 2$ г соответственно. В случайной выборке объема $n_1 = 20$ пакетов для автомата 1 средний вес $\bar{X}_1 = 101$ г. В случайной выборке

объема $n_2 = 15$ пачек для автомата 2 средний вес $\bar{X}_2 = 98$ г. Верно ли, что оба автомата фасуют чай в пачки одинакового среднего веса? Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Р е ш е н и е.

$H_0 : a_1 = a_2$ (генеральные средние равны).

$H_1 : a_1 \neq a_2$.

Проведем двустороннюю проверку (см. 1-ю строку табл. 3 подпункта 1.6.5).

xs1 := 101 xs2 := 98 n1 := 20 n2 := 15 σ1 := 1 σ2 := 2

$$\psi := \frac{xs1 - xs2}{\sqrt{\frac{\sigma1^2}{n1} + \frac{\sigma2^2}{n2}}} \quad \psi = 5.331 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma$$

$$t := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \quad t = 1.96 \quad -t < \psi < t = 0$$

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5 %. Средний вес пачек чая для этих автоматов различен.

Задача 21. (Решить самостоятельно). Автомат 1 и автомат 2 фасуют чай в пачки. Стандартные отклонения $\sigma_1 = 0,5$ г и $\sigma_2 = 1$ г соответственно. В случайной выборке объема $n_1 = 12$ пачек для автомата 1 средний вес $\bar{X}_1 = 81$ г. В случайной выборке объема $n_2 = 16$ пачек для автомата 2 средний вес $\bar{X}_2 = 80$ г. Верно ли, что оба автомата фасуют чай в пачки одинакового среднего веса? Доверительная вероятность $\gamma = 99\%$.

Ответ: автоматы фасуют чай в пачки разного среднего веса.

Задача 22. Рассмотрим две выборки x и y из двух нормальных распределений X и Y с дисперсиями $D(X) = 2$, $D(Y) = 3$ соответственно:

$x = 5,393; 4,431; 6,841; 3,051; 5,538; 5,619; 7,49; 4,085; 5,779; 7,187; 2,424; 6,85; 3,517; 5,649; 3,512; 3,243; 5,6; 2,29; 4,825; 5,584;$

$y = 8,539; 3,871; 5,334; 6,825; 6,322; 6,34; 6,902; 7,425; 7,613; 7,554; 6,451; 4,799; 6,806; 5,739; 4,505.$

Проверим нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ против альтернативной гипотезы $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Доверительная вероятность $\gamma = 99\%$.

Р е ш е н и е в Mathcad. Проводим двустороннюю проверку.

```

x1 := ( 5.393  4.431  6.841  3.051  5.538  5.619  7.49  4.085  5.779 )
x2 := ( 7.187  2.424  6.85  3.517  5.649  3.512  3.243  5.6  2.29 )
x3 := ( 4.825  5.584 )      x := augment(x1,x2,x3)      nx := cols(x)

y1 := ( 8.539  3.871  5.334  6.825  6.322  6.34  6.902  7.425  7.613 )
y2 := ( 7.554  6.451  4.799  6.806  5.739  4.505 )

y := augment(y1,y2)      ny := cols(y)      D1 := 2      D2 := 3

xs := mean(x)      ys := mean(y)

```

$$\psi := \frac{xs - ys}{\sqrt{\frac{D1}{nx} + \frac{D2}{ny}}} \quad \psi = -2.537 \quad \gamma := 0.99 \quad \alpha := 1 - \gamma$$

$$t := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \quad t = 2.576 \quad -t < \psi < t = 1$$

Гипотеза H_0 принимается.

Задача 23. Для производства каждой из $n_1 = 10$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $\text{var1} = 1 \text{ с}^2$). Для производства каждой из $n_2 = 16$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $\text{var2} = 2 \text{ с}^2$). Можно ли сделать вывод, что первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $\gamma = 95 \%$.

Р е ш е н и е. Убедимся сначала, что неизвестные генеральные дисперсии равны, проведя двустороннюю проверку.

```

var1 := 1      var2 := 2      n1 := 10      n2 := 16

```

$$\text{Var1} := \frac{n1}{n1 - 1} \cdot \text{var1} \quad \text{Var2} := \frac{n2}{n2 - 1} \cdot \text{var2} \quad \text{Var2} > \text{Var1} = 1$$

$$\psi := \frac{\text{Var2}}{\text{Var1}} \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := \text{qF}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n2, n1\right)$$

$$-t < \psi < t = 1$$

Теперь для данной задачи проведем правостороннюю проверку.

$$H_0 : M(X_1) = M(X_2);$$

$$H_1 : M(X_1) > M(X_2).$$

Применим Mathcad.

$$\begin{aligned}
 xs1 &:= 30 & xs2 &:= 28 & \psi &:= \frac{xs1 - xs2}{\sqrt{\frac{n1 \cdot var1 + n2 \cdot var2}{n1 + n2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}\right)}} \\
 \psi &= 3.75 & t1 &:= qt\left(\frac{\alpha}{2}, n1 + n2 - 2\right) & t2 &:= qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n1 + n2 - 2\right) \\
 t1 &< \psi < t2 & &= 0
 \end{aligned}$$

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5 %. По первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 24. (Решить самостоятельно). Для производства каждой из $n_1 = 12$ деталей по первой технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_1 = 25$ с (выборочная дисперсия $var1 = 1,5 \text{ с}^2$). Для производства каждой из $n_2 = 11$ деталей по второй технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_2 = 23$ с (выборочная дисперсия $var2 = 2 \text{ с}^2$). Можно ли сделать вывод, что первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $\gamma = 99 \%$.

Ответ: по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 25. (Решить самостоятельно). Рассмотрим две выборки из двух нормальных распределений с одинаковыми дисперсиями:

$x = 4,379; 4,039; 4,331; 3,654; 2,616; 5,062; 4,829; 5,787; 8,1; 6,144; 6,393; 6,219; 6,295; 5,952; 3,523; 5,098; 3,931; 5,985; 4,743; 4,089;$

$y = 5,14; 6,09; 5,433; 5,016; 3,919; 4,421; 4,047; 4,813; 6,44; 5,255; 5,726; 6,046; 4,977; 5,394; 5,229.$

Проверим гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий исследуемых распределений против альтернативной гипотезы о том, что они не равны. Таким образом, $H_0 : M(X) = M(Y)$, $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Доверительная вероятность $\gamma = 99 \%$.

Ответ: гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается на уровне значимости 1 %.

Задача 26. Для производства каждой из $n_1 = 51$ детали по первой технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_1 = 30$ с (выборочная дисперсия $var1 = 6 \text{ с}^2$). Для производства каждой из $n_2 = 41$ детали по второй технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_2 = 25$ с (выборочная дисперсия $var2 = 3 \text{ с}^2$). Можно ли сделать вывод, что первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $\gamma = 95 \%$.

Р е ш е н и е. Как и раньше, получаем, что неизвестные генеральные дисперсии различны. После этого проведем правостороннюю проверку.

$$H_0 : M(X_1) = M(X_2); \quad H_1 : M(X_1) > M(X_2).$$

Применим Mathcad.

$$n1 := 51 \quad n2 := 41 \quad xs1 := 30 \quad xs2 := 25 \quad var1 := 6 \quad var2 := 3$$

$$\psi := \frac{xs1 - xs2}{\sqrt{\frac{var1}{n1 - 1} + \frac{var2}{n2 - 1}}} \quad \psi = 11.323 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma$$

$$t := qt(1 - \alpha, n1 + n2 - 2) \quad t = 1.662 \quad \psi < t = 0$$

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5 %. По первой технологии требуется в среднем больше время для производства одной детали.

Задача 27. (Решить самостоятельно). Для производства каждой из $n_1 = 51$ детали по первой технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_1 = 32$ с (выборочная дисперсия $var1 = 9$ с²). Для производства каждой из $n_2 = 41$ детали по второй технологии было затрачено в среднем $\bar{X}_2 = 28$ с (выборочная дисперсия $var2 = 4$ с²). Можно ли сделать вывод, что первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали? Доверительная вероятность $\gamma = 90$ %.

Ответ: по первой технологии требуется в среднем больше времени для производства одной детали.

Задача 28. Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали $n_1 = 3000$ мужчин и $n_2 = 3500$ женщин. У 50 мужчин и 110 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин? Доверительная вероятность $\gamma = 95$ %.

Р е ш е н и е. Выборочные доли $\tilde{p}_1 = 50/3000$, $\tilde{p}_2 = 110/3500$.

$$H_0 : p_1 = p_2 \text{ (генеральные доли одинаковы)}. \quad H_1 : p_1 < p_2.$$

Проведем левостороннюю проверку.

$$n1 := 3000 \quad n2 := 3500 \quad m1 := 50 \quad m2 := 110$$

$$p1 := \frac{m1}{n1} \quad p2 := \frac{m2}{n2} \quad p3 := \frac{m1 + m2}{n1 + n2}$$

$$\psi := \frac{p1 - p2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}\right) \cdot p3 \cdot (1 - p3)}} \quad \psi = -3.829$$

$$\gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := qt(1 - \alpha, n1 + n2 - 2) \quad t = 1.645$$

$$\psi > -t = 0$$

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5 %. Побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин.

Задача 29. (Решить самостоятельно). Проводились испытания нового лекарства. В эксперименте участвовали $n_1 = 2000$ мужчин и $n_2 = 2500$ женщин. У 40 мужчин и 70 женщин наблюдались побочные эффекты. Можно ли утверждать, что побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают чаще, чем у мужчин? Доверительная вероятность $\gamma = 99$ %.

Ответ: принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости 1 %. Побочные эффекты от нового лекарства у женщин возникают не чаще, чем у мужчин.

Задача 30. Контрольную работу по математике по индивидуальным вариантам выполняли студенты двух групп первого курса. В первой группе было предложено 105 задач, из которых верно решено 60, во второй группе из 140 предложенных задач верно решено 69. Проверить гипотезу об отсутствии существенных различий в усвоении математики студентами обеих групп. Доверительная вероятность $\gamma = 98$ %.

Р е ш е н и е. Имеем гипотезу $H_0 : p_1 = p_2$, т.е. доли решенных задач студентами первой и второй групп равны. В качестве альтернативной возьмем гипотезу $H_1 : p_1 \neq p_2$. При конкурирующей гипотезе H_1 выбираем двустороннюю критическую область

$$n1 := 105 \quad n2 := 140 \quad m1 := 60 \quad m2 := 69$$

$$p1 := \frac{m1}{n1} \quad p2 := \frac{m2}{n2} \quad p3 := \frac{m1 + m2}{n1 + n2}$$

$$\psi := \frac{p1 - p2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}\right) \cdot p3 \cdot (1 - p3)}} \quad \psi = 1.219 \quad \gamma := 0.99$$

$$\alpha := 1 - \gamma \quad t := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n1 + n2 - 2\right) \quad t = 2.596 \quad -t < \psi < t = 1$$

Гипотеза H_0 принимается. Полученные данные не противоречат гипотезе об одинаковом уровне усвоения математики студентами обеих групп.

Задача 31. Контрольную работу по математике по индивидуальным вариантам выполняли студенты четырех групп первого курса. В первой группе было предложено 105 задач, из которых верно решено 60, во второй группе из 140 предложенных задач верно решено 69. В третьей группе из предложенных 125 задач верно решено 63 и в четвертой группе было предложено 160 задач, из которых верно решено 105. Выяснить, можно ли считать, что различия в усвоении математики студентами четырех групп первого курса существенны. Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение. Представим данные задачи в виде таблицы

Номер группы i	Предложено всего задач n_i	Верно решено задач m_i
1	105	60
2	140	69
3	125	63
4	160	105

Произведем вычисления.

ORIGIN := 1

$n := (105 \ 140 \ 125 \ 160)$ $m := (60 \ 69 \ 63 \ 105)$ $k := \text{cols}(n)$

$$w := \frac{\sum m}{\sum n} \quad p1 := \frac{\sum m}{\sum n} \quad \psi := \frac{n \cdot (w^T - p1)^2}{p1 \cdot (1 - p1)} \quad \psi = 10.225$$

$$\gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad t := \text{qchisq}(1 - \alpha, k - 1) \quad t = 7.815$$

$$\psi < t = 0$$

Гипотеза H_0 отвергается, т.е. различие в усвоении математики студентами четырех групп значимо или существенно на 5 %-м уровне.

Исключение грубых ошибок

Грубые ошибки могут возникнуть из-за ошибок показаний измерительных приборов, ошибок регистрации, случайного сдвига запятой в десятичной записи числа и т.д.

Пусть, например, $x^*, x_1, x_2, \dots, x_n$ - совокупность изменяющихся наблюдений, причем x^* резко выделяется. Необходимо решить вопрос о

принадлежности резко выделяющегося значения к остальным, т.е. проверить гипотезу $H_0: \bar{x}_0 = x^*$. Доверительная вероятность γ .

$$\text{Статистика: } \psi = \frac{\bar{x} - x^*}{\sqrt{\text{Var}(x)}}.$$

$$\text{Граничная точка: } t = qt(1 - \alpha, n - 2).$$

Гипотеза H_0 принимается, если $|\psi| \leq t$

Задача 32. Исследуются следующие данные об урожайности пшеницы на 8 опытных участках одинакового размера (ц/га). Результаты приведены таблицей

	Номер опытного участка							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожайность, ц/га	26,5	26,2	35,9	30,1	32,3	29,3	26,1	25,0

Есть основания предполагать, что значение урожайности третьего участка $x^* = 35,9$ зарегистрировано неверно. Является ли это значение аномальным (резко выделяющимся)? Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Р е ш е н и е в Mathcad.

ORIGIN := 1

$x := (26.5 \ 26.2 \ 35.9 \ 30.1 \ 32.3 \ 29.3 \ 26.1 \ 25.0)$ $n := \text{cols}(x)$

$x1 := \text{submatrix}(x, 1, 1, 1, 2)$ $x2 := \text{submatrix}(x, 1, 1, 4, 8)$

$x := \text{augment}(x1, x2)$ $xs := \text{mean}(x)$ $\psi := \frac{xs - 35.9}{\sqrt{\text{Var}(x)}}$ $\psi = -2.99$

$\gamma := 0.95$ $\alpha := 1 - \gamma$ $t := qt(1 - \alpha, n - 2)$ $t = 1.943$

$|\psi| \leq t = 0$

Гипотеза H_0 отвергается и, следовательно, значение $x = 35,9$ является аномальным, и его следует отбросить.

До сих пор мы предполагали, что генеральные совокупности распределены нормально или приблизительно нормально. Теперь мы откажемся от этих условий. Будем проверять гипотезу о наличии связи между значениями двух величин.

H_0 : нет связи между значениями двух величин.

H_1 : есть связь между значениями двух величин.

Составляется *таблица наблюдаемых частот*. По строкам изменяются значения первой величины, по столбцам – значения второй величины. В клетке с индексами (i, j) записана частота $f_0 = n_{i,j}$ - число элементов, у ко-

торых значения первой и второй величин равны i и j соответственно; f_0 - наблюдаемая частота события.

По таблице наблюдаемых частот строят показанным далее способом *таблицу ожидаемых частот*; f_E - ожидаемая частота события.

Важно! Должно выполняться условие $f_E \geq 5$ для каждой клетки таблицы, иначе надо объединить какие-то строки или столбцы.

Таблицу наблюдаемых частот и таблицу ожидаемых частот часто называют *таблицами сопряженности*. Пусть n – общее число наблюдений, $m = (\text{число строк таблицы} - 1) \times (\text{число столбцов таблицы} - 1)$.

Если таблица сопряженности содержит только одну строку, то $m = \text{число столбцов таблицы} - 1$.

Доверительная вероятность γ , уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma$.

Статистика:
$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E}.$$

Критическая точка: $t_{kp} = \chi^2_{(1-\alpha, m)}.$

Если таблица сопряженности имеет размер 2×2 и $n \leq 100$, то вводится поправка Йетса:
$$\chi^2_1 = \sum \frac{(|f_0 - f_E| - 0,5)^2}{f_E}.$$

Отметим значения на числовой оси.

Задача 33. Студенты сдавали экзамены по математике и физике. Есть ли связь между результатами экзаменов?

Таблица наблюдаемых частот

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике			
	пять	четыре	три	два
пять	25	18	10	5
четыре	20	16	15	6
три	15	20	22	13
два	8	10	7	15

Решение. Это таблица наблюдаемых частот f_0 . В клетке (1, 1) написано число 25, т.е. 25 человек получили и по физике, и по математике отличные оценки. В клетке (4, 2) написано число 10, т.е. 10 человек получили хорошие оценки по физике и неудовлетворительные оценки по математике. И т.д.

H_0 : нет связи между оценками.

H_1 : есть связь между оценками.

Построим таблицу ожидаемых частот f_E . Суммируем числа по строкам и столбцам.

Таблица ожидаемых частот

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	25	18	10	5	58
четыре	20	16	15	6	57
три	15	20	22	13	70
два	8	10	7	15	40
Сумма	68	64	54	39	225

Всего получены результаты экзаменов $n = 225$ человек. Отличный результат по математике показали 58 человек, т.е. доля тех, кто получил отличные оценки по математике, равна $58/225$. Если верна гипотеза H_0 , то можно ожидать, что $58/225$ из 68 студентов, получивших по физике отличные оценки, показали отличные знания и по математике. Аналогично можно рассчитать и другие ожидаемые частоты.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	$68 \cdot 58/225$	$64 \cdot 58/225$	$54 \cdot 58/225$	$39 \cdot 58/225$	58
четыре	$68 \cdot 57/225$	$64 \cdot 57/225$	$54 \cdot 57/225$	$39 \cdot 57/225$	57
три	$68 \cdot 70/225$	$64 \cdot 70/225$	$54 \cdot 70/225$	$39 \cdot 70/225$	70
два	$68 \cdot 40/225$	$64 \cdot 40/225$	$54 \cdot 40/225$	$39 \cdot 40/225$	40
Сумма	68	64	54	39	225

Важно! Ожидаемые частоты нельзя округлять до целого значения.

Результаты экзаменов по математике	Результаты экзаменов по физике				Сумма
	пять	четыре	три	два	
пять	17,5	16,5	13,9	10,9	58
четыре	17,2	16,2	13,7	9,9	57
три	21,2	19,9	16,8	12,1	70
два	12,1	11,4	9,6	6,9	40
Сумма	68	64	54	39	225

Если в какой-то клетке получилось значение < 5 , то с целью уничтожения этого в таблицах нужно объединить какие-то строки или столбцы. При округлении надо следить, чтобы исходные суммы не изменились.

Доверительная вероятность $\gamma = 0,95$,

уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$,

$$m = (\text{число строк таблицы} - 1) \cdot (\text{число столбцов таблицы} - 1) = \\ = (4 - 1) \cdot (4 - 1) = 9.$$

Найдем значение статистики:

N	f_0	f_E	$f_0 - f_E$	$(f_0 - f_E)^2$	$(f_0 - f_E)^2 / f_E$
1	25	17,5	7,5	56,25	3,21
2	20	17,2	2,8	7,84	0,46
3	15	21,2	-6,2	38,44	1,81
4	8	12,1	-4,1	16,81	1,39
5	18	16,5	1,5	2,25	0,14
6	16	16,2	-0,2	0,04	0,00
7	20	19,9	0,1	0,01	0,00
8	10	11,4	-1,4	1,96	0,17
9	10	13,9	-3,9	15,21	1,09
10	15	13,7	1,3	1,69	0,12
11	22	16,8	5,2	27,04	1,61
12	7	9,6	-2,6	6,76	0,70
13	5	10,1	-5,1	26,01	2,58
14	6	9,9	-3,9	15,21	1,54
15	13	12,1	0,9	0,81	0,07
16	15	6,9	8,1	65,61	9,51
Сумма	-	-	0	-	24,40

Поясним, как заполняется таблица

Наблюдаемые частоты f_0 пишем в 1-м столбце, а соответствующие им ожидаемые частоты f_E – во 2-м столбце.

Далее производим над столбцами действия, указанные в 1-й строке.

Статистика: $\psi = \sum \frac{(f_0 - f_E)^2}{f_E} = 24,40$ (сумма чисел 5-го столбца).

Граничная точка:

$$\gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad m := 9 \quad t := \text{qchisq}(1 - \alpha, m)$$

$$t = 16.919 \quad \psi := 24.40 \quad \psi < t = 0$$

Отклоняем гипотезу H_0 и принимаем гипотезу H_1 на уровне значимости 5 %. Есть связь между оценками, полученными студентами на экзаменах по математике и физике.

Задача 34. Значения наработки τ (месяцах) на отказ некоторой технической системы приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

0,173	0,748	0,393	0,638	1,669	0,720	1,089	1,139	0,784	0,414
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

0,285	5,479	1,885	1,075	1,632	1,374	0,337	2,457	2,795	0,271
4,623	0,642	4,092	5,641	0,766	1,418	0,747	0,414	0,946	2,132
0,384	1,281	0,909	0,226	0,697	0,943	0,583	0,925	1,257	1,214
1,514	0,251	1,138	0,904	0,337	0,338	1,374	1,443	0,371	1,697

Предполагая генеральный закон распределения логарифмически нормальным, проверить критерий согласия выборки с теоретическим законом с помощью критерия Пирсона. Доверительная вероятность $\gamma = 90 \%$.

Р е ш е н и е. Для решения задачи перейдем к логарифмам данных выборки (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

-1,754	-0,290	-0,934	-0,449	0,512	-0,329	0,085	0,130	-0,323	-0,882
-1,255	1,700	0,634	0,072	0,490	0,318	-1,088	0,899	1,028	-1,302
1,531	-0,443	1,409	1,730	-0,267	0,349	-0,292	-0,882	-0,056	0,757
-0,957	0,248	-0,095	-1,487	-0,361	-0,059	-0,540	-0,078	0,229	0,194
0,415	-1,382	0,129	-2,364	-1,088	-1,085	0,318	0,367	-0,992	0,529

Построим вариационный ряд распределения. Здесь $x_{\min} = -2,364$; $x_{\max} = 1,73$. Разобьем интервал $(-2, 2)$ на 5 интервалов одинаковой длины $\Delta = 0,8$. Значение $-2,364$ отнесем в крайний левый интервал. Подсчитывая число элементов выборки, попадающих в каждый интервал, получим вариационный ряд (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

x_i	$[-2; -1,2)$	$[-1,2; -0,4)$	$[-0,4; 0,4)$	$[0,4; 1,2)$	$[1,2; 2,0]$
m_i	6	11	21	7	5

По виду построенной гистограммы распределения можно сделать вывод о нормальности распределения случайной величины X . Вычислим выборочные среднюю и дисперсию.

$$\bar{x} = \frac{1}{50}(-1,6 \cdot 6 - 0,8 \cdot 11 + 0 \cdot 21 + 0,8 \cdot 7 + 1,6 \cdot 5) = -0,096;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50}(-1,6^2 \cdot 6 - 0,8^2 \cdot 11 + 0 \cdot 21 + 0,8^2 \cdot 7 + 1,6^2 \cdot 5) = 0,7936;$$

$$S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 0,7936 - 0,096^2 = 0,7844;$$

$$\overline{S_x^2} = \frac{n}{n-1} S_x^2 = \frac{50}{49} \cdot 0,7844 = 0,8004;$$

$$\overline{S_x} = \sqrt{\overline{S_x^2}} = 0,895.$$

Найдем теоретические частоты попадания в интервалы (a_i, a_{i+1})

$$p_i = F(a_{i+1}) - F(a_i) = pnorm(a_{i+1}, \bar{x}, \overline{S_x}) - pnorm(a_i, \bar{x}, \overline{S_x}).$$

Для удобства вычислений составим табл. 4.

Т а б л и ц а 4

i	a_i	$F(a_i)$	a_{i+1}	$F(a_{i+1})$	$p_i =$ $= F(a_{i+1}) - F(a_i)$	m_i	$c_i = \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	-2,0	0,017	-1,2	0,109	0,092	6	0,078

2	-1,2	0,109	-0,4	0,367	0,258	11	0,253
3	-0,4	0,367	0,4	0,71	0,343	21	0,864
4	0,4	0,71	1,2	0,926	0,216	7	1,337
5	1,2	0,926	2	0,99	0,064	5	0,310
							$\Sigma = 3,906$

По χ^2 -критерию Пирсона вычислим статистику

$$\psi = \sum_{i=1}^5 \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 3,906.$$

Если гипотеза о согласии H_0 верна, то ψ имеет χ^2 -распределение с $k = 5 - 2 - 1 = 2$ степенями свободы. Для $\gamma = 0,9$ по таблицам χ^2 -распределения находим $t_{kp} = 4,605$. Так как $\psi = 3,906 < t_{kp}$, то гипотеза H_0 принимается. Отсюда следует вывод, что на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$ наработку на отказ можно считать распределенной по логарифмически нормальному закону.

Mathcad-контроль:

ORIGIN := 1

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -1.2 & 6 \\ -1.2 & -0.4 & 11 \\ -0.4 & 0.4 & 21 \\ 0.4 & 1.2 & 7 \\ 1.2 & 2.0 & 5 \end{pmatrix} \quad n := \sum A^{\langle 3 \rangle} \quad Isr := \frac{A^{\langle 1 \rangle} + A^{\langle 2 \rangle}}{2}$$

$$B := \text{augment}(Isr, A^{\langle 3 \rangle})$$

$$bB := \frac{1}{n} \cdot B^{\langle 1 \rangle} \cdot B^{\langle 2 \rangle} \quad bB = -0.096$$

$$bD := \frac{1}{n-1} \cdot B^{\langle 2 \rangle} \cdot (B^{\langle 1 \rangle} - bB)^2 \quad b\sigma := \sqrt{bD} \quad b\sigma = 0.895$$

$$\text{pnorm}(A^{\langle 1 \rangle}, bB, b\sigma) = \begin{pmatrix} 0.017 \\ 0.109 \\ 0.367 \\ 0.71 \\ 0.926 \end{pmatrix} \quad \text{pnorm}(A^{\langle 2 \rangle}, bB, b\sigma) = \begin{pmatrix} 0.109 \\ 0.367 \\ 0.71 \\ 0.926 \\ 0.99 \end{pmatrix}$$

$$P := \text{pnorm}(A^{\langle 2 \rangle}, bB, b\sigma) - \text{pnorm}(A^{\langle 1 \rangle}, bB, b\sigma) \quad P = \begin{pmatrix} 0.092 \\ 0.258 \\ 0.343 \\ 0.216 \\ 0.064 \end{pmatrix}$$

$$C := \frac{\overrightarrow{(A^{\langle 3 \rangle} - n \cdot P)^2}}{n \cdot P} \quad C = \begin{pmatrix} 0.428 \\ 0.285 \\ 0.856 \\ 1.335 \\ 1.002 \end{pmatrix} \quad \psi := \sum C \quad \psi = 3.906$$

Задача 35. Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены табл 1.

Т а б л и ц а 1

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	10	11	8	9	12	10	13	15	12

Определить с помощью λ -критерия Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0,05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке $[0, 10]$.

Р е ш е н и е.

H_0 : различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями несутущественны, т.е. нет никаких предпочтений.

H_1 : различия между эмпирическим и предполагаемым теоретическим распределениями существенны, т.е. предпочтения имеются.

Функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 10]$, имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{10}, & 0 < x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Заполним табл. 2.

Т а б л и ц а 2

x_i	m_i	$w_i = \frac{m_i}{n}$	$F_n(x_i)$	$F(x_i) = 0,1x_i$	$ F(x_i) - F_n(x_i) $
1	2	3	4	5	6
1	10	0,10	0	0,1	0,1
2	11	0,11	0,10	0,2	0,1
3	8	0,08	0,21	0,3	0,09
4	9	0,09	0,29	0,4	0,11
5	12	0,12	0,38	0,5	0,12
6	10	0,10	0,50	0,6	0,1
7	13	0,13	0,60	0,7	0,1
8	15	0,15	0,73	0,8	0,07
9	12	0,12	0,88	0,9	0,02
10	0	0	1,00	1,00	0
Сумма	$n = 100$	-	-	-	max = 0,12

Поясним, как заполняется эта табл. Значения первых двух столбцов взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел 2-го столбца. Каждое число 2-го столбца делим на $n=100$ и результат пишем в 3-м

столбце. Каждое число 4-го столбца равно сумме числа из этой же строки 3-го столбца и предыдущего 4-го столбца. Каждое число 1-го столбца подставляем в формулу $F(x_i) = 0,1x_i$ и результат пишем в 5-м столбце. 6-й столбец – это модуль разности 4-го и 5-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце (оно залито):

$$\max_{x_i} |F(x_i) - F_n(x_i)| = 0,12.$$

$$\text{Тогда статистика } \lambda = \sqrt{n} \cdot \max_{x_i} |F(x_i) - F_n(x_i)| = \sqrt{100} \cdot 0,12 = 1,12.$$

По уровню значимости $\alpha = 0,05$ из специальной таблицы находим критическую точку $\lambda_{кр} = 1,358$.

Так как $\lambda < \lambda_{кр}$ ($1,12 < 1,358$), то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Данные выборки согласуются с равномерным распределением на отрезке $[0, 10]$, т.е. нет никаких предпочтений.

Mathcad-контроль:

ORIGIN := 1

$$xm := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 8 & 9 & 12 & 10 & 13 & 15 & 12 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$xm1 := \text{augment}(xm, a) \quad xm1 := xm1^T \quad x := xm1^{\langle 1 \rangle}$$

$$m := xm1^{\langle 2 \rangle} \quad n := \sum m \quad k := \text{rows}(xm1) \quad w := \frac{m}{n}$$

$$F := \text{punif}(xm1^{\langle 1 \rangle}, 0, 10)$$

$$Fn_1 := 0 \quad s := 2..k \quad Fn_s := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} m_{i,1}$$

w =

	1
1	0.1
2	0.11
3	0.08
4	0.09
5	0.12
6	0.1
7	0.13
8	0.15
9	0.12
10	0

F =

	1
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4
5	0.5
6	0.6
7	0.7
8	0.8
9	0.9
10	1

Fn =

	1
1	0
2	0.1
3	0.21
4	0.29
5	0.38
6	0.5
7	0.6
8	0.73
9	0.88
10	1

$$\overrightarrow{|F - F_n|} =$$

	1
1	0.1
2	0.1
3	0.09
4	0.11
5	0.12
6	0.1
7	0.1
8	0.07
9	0.02
10	0

$$\overrightarrow{\max(|F - F_n|)} = 0.12$$

$$\lambda := \sqrt{n \cdot \overrightarrow{\max(|F - F_n|)}} \quad \lambda = 1.2$$

$$\lambda_{кр} := 1.358 \quad \lambda < \lambda_{кр} = 1$$

Задача 36. (Решить самостоятельно). Респондентам был задан вопрос о том, сколько порций мороженого они съедают за неделю. Результаты опроса приведены таблицей:

Число порций	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	13	15	12	11	8	9	12	10	10

Определить с помощью λ -критерия Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0,05$, согласуются ли данные выборки с равномерным распределением на отрезке $[0, 10]$.

Ответ: согласуются.

Если имеются две случайные выборки объемами n_1 и n_2 ($n_1 \geq 50$, $n_2 \geq 50$), то с помощью λ -критерия Колмогорова-Смирнова можно проверить гипотезу H_0 : две выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности с предполагаемой функцией распределения $F(x)$. В этом случае статистика

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \max_{x_i} |F_{n_1}(x_i) - F_{n_2}(x_i)|,$$

где $F_{n_1}(x_i)$ и $F_{n_2}(x_i)$ - эмпирические функции распределения, построенные по данным соответственно первой и второй выборок.

Задача 37. В двух выборках был задан вопрос о том, сколько порций мороженого респонденты съедают в неделю. Результаты опроса приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Число порций	Частота (выборка 1)	Частота (выборка 2)
--------------	---------------------	---------------------

0-10	2	4
10-20	11	13
20-30	14	7
30-40	18	23
40-50	13	11
50-60	6	9
60-70	23	18
70-80	14	8
80-90	6	6

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же целевой популяции любителей мороженого (т.е. число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения).

Р е ш е н и е.

H_0 - число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения.

Заполним табл. 2.

Т а б л и ц а 2

i	x_i	$n_{1,i}$	$n_{2,i}$	$w_{1,i} = \frac{n_{1,i}}{n_1}$	$F_{n_1}(x_i)$	$w_{2,i} = \frac{n_{2,i}}{n_2}$	$F_{n_2}(x_i)$	$ F_{n_1}(x_i) - F_{n_2}(x_i) $
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0-10	2	4	0,019	0	0,040	0	0
2	10-20	11	13	0,103	0,019	0,131	0,040	0,022
3	20-30	14	7	0,131	0,122	0,071	0,171	0,050
4	30-40	18	23	0,168	0,253	0,232	0,242	0,010
5	40-50	13	11	0,121	0,421	0,111	0,474	0,054
6	50-60	6	9	0,056	0,542	0,091	0,585	0,044
7	60-70	23	18	0,215	0,598	0,182	0,676	0,079
8	70-80	14	8	0,131	0,813	0,081	0,858	0,046
9	80-90	6	6	0,056	0,944	0,061	0,939	0,005
10	90-100	0	0	0	1,000	0	1,000	0
	Сумма	$n_1 = 107$	$n_2 = 99$	-	-	-	-	max = 0,079

Поясним, как заполняется эта табл. В 1-м столбце идет нумерация интервалов. Значения столбцов 2-го, 3-го и 4-го взяты из условия. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Каждое число 3-го (4-го) столбца делим на $n_1 = 107$ ($n_2 = 99$), результат округляем до трех цифр после запятой и пишем в 5-м (7-м) столбце. Каждое число 6-го (8-го) столбца равно сумме числа из этой же строки 5-го (7-го) столбца предыдущего числа 6-го (8-го) столбца. 9-й столбец – это модуль разности 6-го и 8-го столбцов.

Определим наибольшее число в последнем столбце:

$$\max_{x_i} |F_{n_1}(x_i) - F_{n_2}(x_i)| = 0,079.$$

Вычисляем статистику

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \max_{x_i} |F_{n_1}(x_i) - F_{n_2}(x_i)| = 0,564.$$

По уровню значимости $\alpha = 0,05$ из специальной таблицы находим критическую точку $\lambda_{kp} = 1,358$.

Так как $\lambda < \lambda_{kp}$ ($0,564 < 1,358$), то мы принимаем гипотезу H_0 на уровне значимости $0,05$. Число съеденных порций мороженого определяется одной и той же функцией распределения.

Mathcad-контроль:

ORIGIN := 1

$$x1m1m2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 10 & 11 & 13 \\ 20 & 14 & 7 \\ 30 & 18 & 23 \\ 40 & 13 & 11 \\ 50 & 6 & 9 \\ 60 & 23 & 18 \\ 70 & 14 & 8 \\ 80 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a &:= (90 \ 0 \ 0) \\ x1m1m2 &:= \text{stack}(x1m1m2, a) \\ k &:= \text{rows}(x1m1m2) \end{aligned}$$

$$n1 := \sum x1m1m2^{\langle 2 \rangle} \quad n2 := \sum x1m1m2^{\langle 3 \rangle}$$

$$m1 := x1m1m2^{\langle 2 \rangle} \quad m2 := x1m1m2^{\langle 3 \rangle} \quad w1 := \frac{m1}{n1} \quad w2 := \frac{m2}{n2}$$

$$Fn1_1 := 0 \quad Fn2_1 := 0 \quad s := 2..k$$

$$Fn1_s := \frac{1}{n1} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} x1m1m2_{i,2} \quad Fn2_s := \frac{1}{n2} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} x1m1m2_{i,3}$$

$w1 =$

	1
1	0.019
2	0.103
3	0.131
4	0.168
5	0.121
6	0.056
7	0.215
8	0.131
9	0.056
10	0

 $w2 =$

	1
1	0.04
2	0.131
3	0.071
4	0.232
5	0.111
6	0.091
7	0.182
8	0.081
9	0.061
10	0

 $F_{n1} =$

	1
1	0
2	0.019
3	0.121
4	0.252
5	0.421
6	0.542
7	0.598
8	0.813
9	0.944
10	1

 $F_{n2} =$

	1
1	0
2	0.04
3	0.172
4	0.242
5	0.475
6	0.586
7	0.677
8	0.859
9	0.939
10	1

$$\overrightarrow{|F_{n1} - F_{n2}|} =$$

	1
1	0
2	0.022
3	0.05
4	$9.912 \cdot 10^{-3}$
5	0.054
6	0.044
7	0.079
8	0.046
9	$4.531 \cdot 10^{-3}$
10	0

$$\overrightarrow{\max(|F_{n1} - F_{n2}|)} = 0.079$$

$$\lambda := \sqrt{\frac{n1 \cdot n2}{n1 + n2}} \cdot \overrightarrow{\max(|F_{n1} - F_{n2}|)}$$

$$\lambda = 0.564$$

$$\lambda_{kp} := 1.358$$

$$\lambda < \lambda_{kp} = 1$$

Задача 38. (Решить самостоятельно). В двух выборках был задан вопрос о том, сколько порций мороженого респонденты съедают в неделю. Результаты опроса приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Число порций	Частота (выборка 1)	Частота (выборка 2)
0-10	3	5
10-20	12	14
20-30	13	6
30-40	19	24
40-50	12	10
50-60	5	10

60-70	22	16
70-80	15	11
80-90	7	7

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же целевой популяции любителей мороженого (т.е. число съеденных порций мороженого в выборках определяется одной и той же функцией распределения).

Ответ: определяется.

Задача 39. В табл. 1 приведен ряд моментов срока работы электрических лампочек (в годах).

Т а б л и ц а 1

0,001	0,001	0,003	0,012	0,046	0,169	0,763	1,620	0,007	1,728
2,067	1,824	0,187	0,646	0,389	1,046	4,672	0,113	1,295	0,500
1,754	0,543	0,074	1,075	0,370	2,612	1,504	0,396	3,245	1,751
0,369	0,534	1,227	0,724	1,307	1,353	2,157	1,000	1,800	0,382
0,500	0,697	0,636	0,365	0,916	1,871	1,134	0,606	0,975	1,043

Проверить по критерию Колмогорова нормальность распределения выборки. Доверительная вероятность $\gamma = 95 \%$.

Р е ш е н и е. Построим интервальный ряд выборки. Для этого разобьем интервал $(0, 4)$ на 8 равных интервалов длины 0,5 и подсчитаем число значений выборки, попадающих в каждый интервал. При этом значение 4,672 отнесем в правый (8-й) интервал. Получим табл. 2.

Т а б л и ц а 2

x_i	0-0,5	0,5-1	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4
m_i	17	11	9	8	2	1	1	1

Найдем выборочные среднюю и дисперсию

$$\bar{x} = \frac{1}{50} (0,25 \cdot 17 + 0,75 \cdot 11 + 1,25 \cdot 9 + 1,75 \cdot 8 + 2,25 \cdot 2 + 2,75 + 3,25 + 3,74) = 1,04;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50} (0,25^2 \cdot 17 + 0,75^2 \cdot 11 + 1,25^2 \cdot 9 + 1,75^2 \cdot 8 + 2,25^2 \cdot 2 + 2,75^2 + 3,25^2 + 3,75^2) = 1,7625$$

$$S_x^2 = 1,7625 - 1,04^2 = 0,6809;$$

$$\overline{S_x^2} = \frac{50}{49} \cdot 0,6809 = 0,6948;$$

$$\overline{S_x} = 0,834.$$

Найдем накопленные относительные частоты $w_i^{\text{нак}} = \frac{1}{n} \sum m_i$ и теоретическую функцию распределения $F(a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{\overline{S_x}}\right) = \text{pnorm}(a_i, \bar{x}, \overline{S_x})$, где a_i - концы интервалов $[a_i, a_{i+1})$ (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

i	a_i	$F(a_i)$	m_i	$w_i = m_i / n$	$F_n(a_i)$	$ F(a_i) - F_n(a_i) $
1	0	0,106	17	0,34	0	0,106
2	0,5	0,259	11	0,22	0,34	0,081
3	1	0,481	9	0,18	0,56	0,079
4	1,5	0,709	8	0,16	0,74	0,031
5	2	0,875	2	0,04	0,9	0,025
6	2,5	0,96	1	0,02	0,94	0,02
7	3	0,991	1	0,02	0,96	0,031
8	3,5	0,998	1	0,02	0,98	0,018
9	4	1	0	0	1	max = 0,106

Вычислим λ -статистику Колмогорова

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot \max_i |F(a_i) - F_n(a_i)| = \sqrt{50} \cdot 0,106 = 0,751.$$

Для уровня доверия $\gamma = 0,95$ по табл. 4 находим критическое значение $\lambda_{кр} = 1,36$. Так как $\lambda < \lambda_{кр}$, то гипотезу о нормальности принимаем.

Т а б л и ц а 4

γ	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
$t_{кр}$	0,89	0,97	1,07	1,22	1,36	1,48	1,63	1,73	1,95	2,03

Mathcad-контроль:

ORIGIN := 1

$$am := \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 3 & 3.5 \\ 17 & 11 & 9 & 8 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$am1 := \text{augment}(am, a) \quad am1 := am1^T \quad x := am1^{\langle 1 \rangle}$$

$$m := am1^{\langle 2 \rangle} \quad n := \sum m \quad k := \text{rows}(am1) \quad w := \frac{m}{n}$$

$$F := \text{pnorm}(am1^{\langle 1 \rangle}, 1.04, 0.834)$$

$$Fn_s := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} m_{i,1}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.22 \\ 0.18 \\ 0.16 \\ 0.04 \\ 0.02 \\ 0.02 \\ 0.02 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.259 \\ 0.481 \\ 0.709 \\ 0.875 \\ 0.96 \\ 0.991 \\ 0.998 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.34 \\ 0.56 \\ 0.74 \\ 0.9 \\ 0.94 \\ 0.96 \\ 0.98 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{|F - F_n|} = \begin{pmatrix} 0.106 \\ 0.081 \\ 0.079 \\ 0.031 \\ 0.025 \\ 0.02 \\ 0.031 \\ 0.018 \\ 1.932 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\max(|F - F_n|)} = 0.106$$

$$\lambda := \sqrt{n} \cdot \overrightarrow{\max(|F - F_n|)} \quad \lambda = 0.751$$

$$\lambda_{кр} := 1.358 \quad \lambda < \lambda_{кр} = 1$$

Задача 40. В ОТК с точностью до 1 мм было измерено 100 деталей, изготовленных на автоматическом станке. В исходной статистической табл. 1 приведены отклонения от номинального размера, разбитые на интервалы, количество деталей, попавших в каждый интервал. Оценить с помощью критерия Пирсона гипотезу о согласии выборочного распределения с нормальным законом распределения. Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Т а б л и ц а 1

Интервалы	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)
Частоты	3	6	8	12	25	20	13	8
Интервалы	(20;25)	(25;30)						
Частоты	4	1						

Р е ш е н и е. Пусть X - случайная величина, выражающая отклонение размера детали от номинального. Параметры нормального закона a и σ^2 , являющиеся соответственно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X , неизвестны, поэтому заменяем их «наилучшими» оценками по выборке – несмещенной выборочной средней и выборочной дисперсией. Найдем эти величины. Для этого

1) Составим статистическую матрицу A (первый столбец которой состоит из левых концов интервалов, второй столбец – из правых концов, а третий столбец состоит из частот), найдем число строк матрицы A и сумму элементов третьего столбца:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$A1 := \begin{pmatrix} -20 & -15 & 3 \\ -15 & -10 & 6 \\ -10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 25 \\ 5 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad A3 := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 13 \\ 15 & 20 & 8 \\ 20 & 25 & 4 \\ 25 & 30 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \text{stack}(A1, A2, A3) \quad m := \text{rows}(A) \quad n := \sum A^{\langle 3 \rangle}$$

2) Найдем средние точки Isr исходных интервалов (т.е. полусуммы элементов первых двух столбцов матрицы A):

$$Isr := \frac{A^{\langle 1 \rangle} + A^{\langle 2 \rangle}}{2}$$

3) Получаем новую статистическую матрицу B :

$$B := \text{augment}(Isr, A^{\langle 3 \rangle})$$

4) Вычислим выборочную среднюю bxs , выборочную дисперсию bD и выборочное среднее квадратичное отклонение $b\sigma$ первого столбца матрицы B :

$$bxs := \frac{1}{n} \cdot B^{\langle 1 \rangle} \cdot B^{\langle 2 \rangle} \quad bxs = 4.15 \quad bD := \frac{1}{n-1} \cdot B^{\langle 2 \rangle} \cdot (B^{\langle 1 \rangle} - bxs)^2$$

$$bD = 92.957 \quad b\sigma := \sqrt{bD} \quad b\sigma = 9.641$$

Согласно гипотезе, ДФР вероятности случайной величины X имеет вид $f(x) = \frac{1}{9,641 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-4,15)^2}{2 \cdot 9,641^2}\right)$.

Переходим к выяснению вопроса о согласии выборочного распределения с нормальным законом, имеющим параметры $a = bxs = 4,15$ и $\sigma = b\sigma = 9,641$.

Так как в каждом интервале вариационного ряда должно быть не менее пяти элементов выборки (это необходимое условие для приложения

критерия Пирсона), то, объединив все результаты измерений табл. 1 в восемь интервалов, получим новую статистическую матрицу C :

$$C1 := \begin{pmatrix} -20 & -10 & 9 \\ -10 & -5 & 8 \\ -5 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 25 \end{pmatrix} \quad C2 := \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 13 \\ 15 & 20 & 8 \\ 20 & 30 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C := \text{stack}(C1, C2) \\ m1 := \text{rows}(C) \end{array}$$

Для расчета вероятностей p_i попадания случайной величины X в интервал (x_i, x_{i+1}) новой статистической матрицы C используем функцию Лапласа в соответствии со свойствами нормального закона распределения:

$$p_i = P(x_i \leq X \leq x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - BB}{\sigma B}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - BB}{\sigma B}\right).$$

Находим статистику критерия Пирсона:

$$P := \text{pnorm}(C^{\langle 2 \rangle}, bxs, b\sigma) - \text{pnorm}(C^{\langle 1 \rangle}, bxs, b\sigma)$$

$$\psi := \sum \left(\frac{\left(\overrightarrow{C^{\langle 3 \rangle}} - n \cdot P \right)^2}{n \cdot P} \right) \quad \psi = 3.775$$

Критическая точка t :

$$\gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma \quad r := 2 \quad t := \text{qchisq}(1 - \alpha, m1 - r - 1)$$

Проверка критерия принятия гипотезы H_0 :

$$\psi < t = 1 \blacksquare$$

Гипотеза H_0 о выбранном теоретическом нормальном распределении с параметрами $a = 4,15$ и $\sigma = 9,641$ согласуется с опытными данными. Следовательно, есть основания принять эту гипотезу.

Задача 41. Для эмпирического распределения рабочих по цехам по выработке на одного рабочего механического цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим получена статистическая таблица:

Интервалы выработки в отчетном году (в %) к предыдущему	(94;100)	(100;106)	(106;112)	(112;118)	(118;124)
Частоты рабочих	3	7	11	20	28
Интервалы выработки в отчетном году (в %) к предыдущему	(124;130)	(130;136)	(136;142)		
Частоты рабочих	19	19	2		

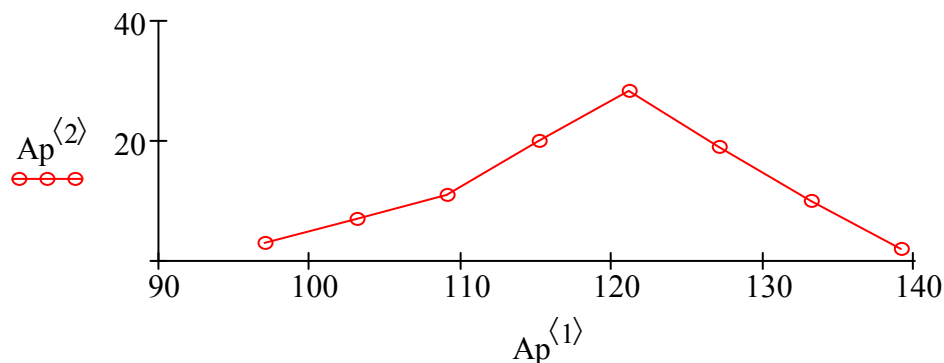
По этой таблице подобрать соответствующее теоретическое распределение и проверить гипотезу о согласованности двух распределений (эмпирического и теоретического) с помощью критерия Пирсона. Доверительная вероятность $\gamma = 95\%$.

Решение. Пусть случайная величина X - выработка (в %) рабочих предприятия. Построим полигон относительных частот

ORIGIN := 1

$$A1 := \begin{pmatrix} 94 & 100 & 3 \\ 100 & 106 & 7 \\ 106 & 112 & 11 \\ 112 & 118 & 20 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 118 & 124 & 28 \\ 124 & 130 & 19 \\ 130 & 136 & 10 \\ 136 & 142 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A := \text{stack}(A1, A2) \\ m := \text{rows}(A) \end{array}$$

$$n := \sum A^{(3)} \quad \text{Isr} := \frac{A^{(1)} + A^{(2)}}{2} \quad \text{Ap} := \text{augment}\left(\text{Isr}, \frac{A^{(3)}}{n} \cdot 100\right)$$



По виду этого полигона* можно предположить *нормальный закон распределения* признака.

Найдем выборочные параметры этого нормального закона a и σ , являющиеся соответственно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X .

$$bxs := \frac{1}{n} \cdot \text{Ap}^{(1)} \cdot \text{Ap}^{(2)} \quad bxs = 119.2 \quad bD := \frac{1}{n-1} \cdot \text{B}^{(2)} \cdot (\text{B}^{(1)} - bxs)^2$$

$$bD = 88.364 \quad b\sigma := \sqrt{bD} \quad b\sigma = 9.4$$

Следовательно, ДФР предполагаемого нормального закона имеет вид

* Вариационный ряд является статистическим аналогом (реализацией) наблюдения признака (случайной величины X). В этом смысле полигон (гистограмма) аналогичен кривой распределения, а эмпирическая функция распределения – функции распределения случайной величины X .

$$p(x) = \frac{1}{9,4 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-119,2)^2}{2 \cdot 9,4^2}\right).$$

Проверим гипотезу о согласованности полученной ДФР с опытными данными. Для этого объединим некоторые соседние интервалы.

$$C1 := \begin{pmatrix} 94 & 106 & 10 \\ 106 & 112 & 11 \\ 112 & 118 & 20 \end{pmatrix} \quad C2 := \begin{pmatrix} 118 & 124 & 28 \\ 124 & 130 & 19 \\ 130 & 142 & 12 \end{pmatrix} \quad C := \text{stack}(C1, C2)$$

$$m1 := \text{rows}(C)$$

$$P := \text{pnorm}(C^{\langle 2 \rangle}, bxs, b\sigma) - \text{pnorm}(C^{\langle 1 \rangle}, bxs, b\sigma)$$

$$\psi := \sum \left(\frac{\left(\overrightarrow{C^{\langle 3 \rangle}} - n \cdot P \right)^2}{n \cdot P} \right) \quad \psi = 2.301 \quad \gamma := 0.95 \quad \alpha := 1 - \gamma$$

$$r := 2 \quad t := \text{qchisq}(1 - \alpha, m1 - r - 1) \quad \psi < t = 1$$

Гипотеза H_0 о выбранном теоретическом нормальном законе распределения с параметрами $a = 119,2$ и $\sigma = 9,4$ согласуется с опытными данными.

Замечание. При проверке гипотез о законе распределения на данном уровне значимости, *контролируется* лишь ошибка первого рода, но нельзя сделать вывод о степени риска, связанного с принятием неверной гипотезы, т.е. возможностью совершения ошибки второго рода.

